

# Erfahrungsbericht

Vortragsthema: Halbeinfache Liealgebren

In meinem Vortrag, den ich am zweiten Tag des Kollegs hielt, wurden halbeinfache und einfache Liealgebren definiert und einige ihrer Eigenschaften bewiesen. In den vorherigen Vorträgen hatten wir schon Wichtiges über nilpotente und auflösbare Liealgebren gelernt. Ziel meines Vortrags war, den Beweis des Satzes von Weyl (Jede endlich dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Liealgebra ist vollständig reduzibel) vorzubereiten. Er spielt im Zusammenhang mit halbeinfachen Liealgebren eine ähnliche Rolle wie Satz von Engel für nilpotente und der Satz von Lie für auflösbare Liealgebren. Die wichtigsten Aussagen meines Vortrags waren:

- (1) Cartans Kriterium für Halbeinfachheit
- (2) Jede halbeinfache Liealgebra lässt sich schreiben als direkte Summe einfacher Ideale

Im folgenden möchte ich einen Überblick meinen Vortrag geben und dabei die Aussagen (1) und (2) detaillierter erklären:

Es gibt mehrere äquivalente Möglichkeiten halbeinfache Liealgebren zu definieren. In der Literatur, die wir in der ersten Kollegphase benutzten, ist eine Liealgebra halbeinfach, falls ihr maximal auflösbares Ideal verschwindet. Eine Liealgebra  $\mathfrak{g}$  heißt einfach, falls sie nicht abelsch ist und  $\{0\}$  und  $\mathfrak{g}$  die einzigen Ideale sind.

Jede einfache Liealgebra ist auch halbeinfach.

Ein für die Strukturtheorie von Liealgebren sehr wichtiges Werkzeug ist die Cartan-Killing Form, eine symmetrische invariante Bilinearform, die man jeder Liealgebra zuordnen kann. Sie hilft beim Test einer Liealgebra auf Halbeinfachheit:

(1) **Cartans Kriterium für Halbeinfachheit** anwendet:

Eine Liealgebra  $\mathfrak{g}$  ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Cartan-Killing Form  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  nicht ausgeartet ist.

Nun zu (2)

**Proposition:** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Liealgebra. Dann gibt es einfache Ideale  $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_k$ , sodass

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$$

Jedes Ideal  $\mathfrak{i} \leq \mathfrak{g}$  ist halbeinfach und direkte Summe  $\mathfrak{i} = \bigoplus_{i \in J} \mathfrak{g}_i$  für  $J \subset \{1, \dots, k\}$ .

Außerdem ist jede direkte Summe einfacher Liealgebren halbeinfach.

Im Beweis wird mehrfach von folgenden Aussagen Gebrauch gemacht:  $\mathfrak{j}^\perp$  ist ein Ideal und  $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{j}^\perp$  ist auflösbar (Orthogonalität bzgl. der Cartan-Killing Form). Jedes halbeinfache Ideal  $\mathfrak{j}$  erlaubt eine Zerlegung  $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{j}^\perp$ . Zeigt man nun zuerst, dass jedes Ideal einer halbeinfachen Liealgebra halbeinfach ist, so liefert die erste Aussage eine Zerlegung von  $\mathfrak{g}$  und die erste Aussage folgt mit einem Induktionsargument. Um einzusehen, dass sich Ideale  $\mathfrak{i} \neq \{0\}$  entsprechend zerlegen, werden Projektionen von  $\mathfrak{g}$  auf die Ideale  $\mathfrak{g}_i$  zu Hilfe genommen und die Einfachheit der  $\mathfrak{g}_i$  ausgenutzt. Dabei erkennt man dass  $\mathfrak{i} \neq \{0\}$  nicht auflösbar sein kann, woraus auch die letzte Aussage folgt. Mit (2) ergibt sich dann auch, dass jede halbeinfache Liealgebra perfekt ist (d.h.  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ), sowie, dass Bilder von  $\mathfrak{g}$  unter Homomorphismen halbeinfach sind.

Zum Schluss wurde noch kurz der Beweis für folgenden hilfreichen Satz skizziert:

**Satz:** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Liealgebra. Dann sind alle Derivationen innere Derivationen, d.h.

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) = \text{der}(\mathfrak{g})$$

Die Vorbereitung des Vortrags war sehr angenehm, da die zugrunde liegende Literatur sehr detailliert ausgearbeitet ist, und sich in 45 min Vortragszeit gut vorstellen ließ, ohne allzuviel kürzen zu müssen.