

E1) Faserbündel, Hauptfaserbündel und assoziierte Bündel

Definition 1. Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Ein C^k - Faserbündel $\xi = (E, B, F, q)$ besteht aus C^k -Mannigfaltigkeiten E, B, F und einer C^k - Abbildung $q : E \rightarrow B$ mit der lokalen Trivialitätsbedingung: Jeder Punkt $b \in B$ besitzt eine offene Umgebung U mit einem C^k - Diffeomorphismus

$$\varphi_U : U \times F \rightarrow q^{-1}(U) \text{ so dass } q \circ \varphi_U = p_U : U \times F \rightarrow U, (u, f) \mapsto u$$

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi_U} & q^{-1}(U) \\ & \searrow p_U & \swarrow q \\ & & U \end{array}$$

E heißt Totalraum, B Basisraum, F Faser und (U, φ_U) Trivialisierung.

Beispiel 2. 1. Eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ ist ein Faserbündel mit diskreter Faser:

$$\forall x \in X \exists \text{ offene Umgebung } U : p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i, p|_{U_i} : U_i \rightarrow U \text{ Homöomorphismus}$$

$$\text{Definiere } \varphi_U : U \times I \rightarrow p^{-1}(U) \text{ durch } (u, i) \mapsto p|_{U_i}^{-1}(u).$$

2. Ein Tangentialbündel ist ein Faserbündel mit Faser \mathbb{R}^n :

Sei M eine Mannigfaltigkeit, (U_i, φ_i) Atlas. Dann ist $T(M)$ Mannigfaltigkeit mit Atlas $(T(U_i), T(\varphi_i))$ und $T_p(\varphi_i) : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^n, [\gamma] \mapsto (\varphi_i \circ \gamma)'(0)$ ein linearer Isomorphismus.

$$\text{Definiere } \varphi_U : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow q^{-1}(U) = T(U) \text{ durch } (p, r) \mapsto T_p(\varphi_i)^{-1}(r)$$

Definition 3. Sei G eine Lie-Gruppe, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Ein C^k - Hauptfaserbündel $\xi = (P, M, G, q, \sigma)$ besteht aus C^k -Mannigfaltigkeiten P, M , einer C^k -Rechtswirkung $\sigma : P \times G \rightarrow P$ und einer C^k - Abbildung $q : P \rightarrow M$ mit der lokalen Trivialitätsbedingung:

Jeder Punkt $m \in M$ besitzt eine offene Umgebung U mit einem C^k - Diffeomorphismus

$$\varphi_U : U \times G \mapsto q^{-1}(U) \text{ so dass } q \circ \varphi_U = p_U$$

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\varphi_U} & q^{-1}(U) \\ & \searrow p_U & \swarrow q \\ & & U \end{array}$$

und der Äquivarianz-Bedingung $\varphi_U(u, gh) = \sigma(\varphi_U(u, g), h)$ für $u \in U, g, h \in G$.

Bemerkung 4. Für jedes Hauptfaserbündel $\xi = (P, M, G, q, \sigma)$ ist (P, M, G, q) ein Faserbündel.

Beispiel 5. (Rahmenbündel)

- (i) Sei M glatte Mannigfaltigkeit und (TM, M, \mathbb{R}^n, q) das zugehörige Tangentialbündel.

Ein Rahmen bei x ist ein linearer Isomorphismus von $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ (entspricht geordneter Basis von $T_x M$). Sei F_x die Menge der Rahmen bei x . $GL_n(\mathbb{R})$ wirkt von rechts auf F_x via

$$p \cdot g = p \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$$

was wieder ein linearer Isomorphismus ist. Sei

$$L(M) = \coprod_{x \in M} F_x \text{ und } \pi : L(M) \rightarrow M, (p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M) \mapsto x$$

Sei $(U_i, \varphi_i)_i$ eine Trivialisierung von TM , also $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_i)$ ein Isomorphismus. Somit ist

$$\varphi_{i,x} : \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_i), r \mapsto \varphi_i(x, r)$$

ein linearer Isomorphismus und man kann Trivialisierungen

$$\tilde{\varphi}_i : U_i \times GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi^{-1}(U_i), (x, p) \mapsto (\varphi_{i,x} \circ p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M)$$

definieren. Über $\tilde{\varphi}_i$ kann $L(M)$ nun eine glatte Struktur gegeben werden. Da außerdem $\varphi_{i,x} \circ (gh) = \varphi_{i,x} \circ g \circ h = (\varphi_{i,x} \circ g) \cdot h$ gilt, ist $P_{GL_n} = (L(M), M, GL_n(\mathbb{R}), \pi, \cdot)$ ein $GL_n(\mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel, genannt Rahmenbündel.

- (ii) Wenn nun M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $(U_i, \varphi_i)_i$ eine Trivialisierung von TM ist, dann kann man durch Anwenden des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahrens auf die zugehörigen linear unabhängigen Schnitte orthonormale Trivialisierungen $(U_i, \hat{\varphi}_i)_i$ erhalten (*). Dann ist $\hat{\varphi}_{i,x} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ eine lineare Isometrie, und $O(n)$ wirkt auf den linearen Isometrien von rechts. Also kann man im obigen Verfahren die linearen Isomorphismen ersetzen durch lineare Isometrien $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ (entspricht orthonormalen Basen von $T_x M$) und GL_n durch $O(n)$. Damit erhält man das $O(n)$ -Hauptfaserbündel P_O , das Bündel der orthonormalen Rahmen.

(*): Sei $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U_i)$ und betrachte $\bar{e}_j : U_i \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n, u \mapsto (u, e_j)$. Nun sind die $\varphi_i \circ \bar{e}_j$ linear unabhängige Schnitte von $q^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$, da φ_i an jedem Punkt ein linearer Isomorphismus ist und die e_j linear unabhängig. Wende nun das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren auf $\varphi_i \circ \bar{e}_1, \dots, \varphi_i \circ \bar{e}_n$ an und nenne die neuen orthogonalen Schnitte $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$. Definiere nun eine neue Trivialisierung $\hat{\varphi}_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow q^{-1}(U_i)$ durch $\hat{\varphi}_i(\bar{e}_j(u)) = \bar{f}_j(u)$. Nach Konstruktion ist nun $\hat{\varphi}_{i,x}$ eine lineare Isometrie, da es eine Orthonormalbasis auf eine andere schickt, $\hat{\varphi}_{i,x}(e_i) = \hat{\varphi}_i(\bar{e}_j(u)) = \bar{f}_j(u)$.

- (iii) Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit und $(U_i, \varphi'_i)_i$ ein zu der Orientierung gehöriger Atlas von M . Sei $(U_i, \varphi_i)_i$ eine Trivialisierung von TM zu diesem Atlas, also

$\varphi_i(x, r) = T_x(\varphi'_i)^{-1}(r)$. Analog wie oben kann man nun die linearen Isomorphismen durch orientierungserhaltende lineare Isomorphismen (entspricht orientierten Basen von $T_x M$) und GL_n durch GL_n^+ ersetzen und erhält das GL_n^+ -Hauptfaserbündel $P_{GL_n^+}$, genannt Bündel der orientierten Rahmen. Dies funktioniert wieder, da GL_n^+ auf den orientierungserhaltenden Isomorphismen von rechts wirkt und, da M orientiert ist, $T_p(\varphi'_i)$ und somit auch $\varphi_{i,x}(r) = T_x(\varphi'_i)^{-1}(r)$ orientierungserhaltend ist.

- (iv) Insbesondere kann man nun eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit betrachten und erhält (für orientierungserhaltende Isometrien und ggf. eine gemeinsame Verfeinerung der Trivialisierungen) das $SO(n)$ -Hauptfaserbündel P_{SO} , genannt Bündel der orientierten orthonormalen Rahmen.

Definition 6. Seien $\xi_i = (P_i, M_i, G_i, q_i, \sigma_i)$ $i = 1, 2$ Hauptfaserbündel.

Ein Morphismus $\psi : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ von Hauptfaserbündeln ist ein C^k -Morphismus $\Psi : P_1 \rightarrow P_2$ zusammen mit einem Homomorphismus $\lambda : G_1 \rightarrow G_2$ von Lie-Gruppen mit

$$\psi(p.g) = \psi(p).\lambda(g) \quad \text{für } p \in P_1, g \in G_1.$$

Dadurch werden Fasern auf Fasern abgebildet und somit eine C^k -Abbildung $\tilde{\psi} : M_1 \rightarrow M_2$ induziert.

Falls $M_1 = M_2 = M$ und $\tilde{\psi} = \text{id}_M$, dann heißt ψ vertikaler Morphismus.

Ein vertikaler Morphismus zwischen zwei Hauptfaserbündeln mit $G_1 = G_2$, $\lambda = \text{id}$ heißt Äquivalenz. Die Äquivalenzklassen werden mit $\text{Prin}_G(M)$ bezeichnet.

Definition 7. Sei $\xi = (P, M, G, q, \sigma)$ ein Hauptfaserbündel und

$$\tau : G \times F \rightarrow F, \quad (g, f) \mapsto g.f$$

eine glatte Wirkung von G auf F . Dann ist

$$P \times_G F := (P \times F) / G$$

die Menge der G -Bahnen von G in $P \times F$ unter der Linkswirkung

$$g.(p, f) := (p.g^{-1}, g.f)$$

Dann definiert

$$\tilde{q} : P \times_G F \rightarrow M, \quad G.(p, f) \mapsto q(p)$$

ein Faserbündel $(P \times_G F, M, F, \tilde{q})$, genannt assoziiertes Bündel.

da

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{-1}(U) &= G.(q^{-1}(U) \times F) \\ \tilde{\varphi}_U(u, f) &= G.(\varphi_U(u, e), f) \\ \tilde{q}(G.(\varphi_U(u, e), f)) &= q(\varphi_U(u, e)) = u \end{aligned}$$

Beispiel 8. Das Tangentialbündel $\tau_M = (TM, M, \mathbb{R}^n, q)$ ist assoziiert zum Rahmenbündel $P_{GL_n} = (L(M), M, GL_n, \pi, \cdot)$:

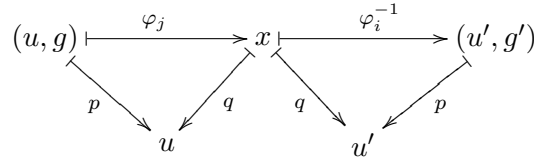
Sei (U, φ_U) bzw. (U, φ'_U) eine gemeinsame Trivialisierung. Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc} (\pi^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n)/GL_n & \rightarrow & ((U \times GL_n) \times \mathbb{R}^n)/GL_n & \rightarrow & U \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & q^{-1}(U) \\ [(\varphi_U(u, h), r)] & \mapsto & [(u, h, r)] & \mapsto & (u, h, r) & \mapsto & \varphi'_U(u, h, r) \end{array}$$

Die letzte Abbildung ist als Trivialisierung ein Isomorphismus, die erste Abbildung ist ein Isomorphismus, da sie aus der Trivialisierung entstanden ist und $(\varphi_U(u, h), r) = (\varphi_U(u, h) \cdot g^{-1}, g \cdot r) \mapsto (u, hg^{-1}, g \cdot r) = (u, h, r)$ gilt nach der Äquivarianzbedingung. Die mittlere Abbildung ist ein Isomorphismus, da $(u, h, r) = (u, hg^{-1}, g \cdot r) \mapsto (u, hg^{-1}g \cdot r) = (u, hr)$.

Definition 9. Sei $\xi = (P, M, G, q, \sigma)$ ein Hauptfaserbündel und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M so dass es Trivialisierungen $\varphi_i := \varphi_{U_i} : U_i \times G \rightarrow q^{-1}(U_i)$ gibt. Sei $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Wenn diese Menge nichtleer ist, betrachte

$$\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j : U_{ij} \times G \rightarrow U_{ij} \times G$$



Also gilt $u = u'$. Definiere nun $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ durch $g_{ij}(u) = g'g^{-1}$. Nun gilt also

$$\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j(u, g) = (u, g_{ij}(u)g)$$

wegen der Äquivarianzbedingung für alle $g \in G$ und die g_{ij} werden Übergangsfunktionen genannt.

Diese erfüllen die Relation $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$

$$(u, g_{ik}(u)g) = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_k(u, g) = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_k(u, g) = (u, g_{ij}(u)g_{jk}(u)g)$$

und somit auch $g_{ii} = 1$ und $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$.

Proposition 10. a) Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M und seien $g_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j, G)$ mit $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$.

Dann existiert ein Hauptfaserbündel $\xi = (P, M, G, q, \sigma)$ und Trivialisierungen

$$\begin{array}{l} \varphi_{U_i} : U_i \times G \rightarrow q^{-1}(U_i) \quad \text{so dass} \\ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j(u, g) = (u, g_{ij}(u)g) \end{array}$$

- b) Zwei Hauptfaserbündel über M mit Überdeckung $(U_i)_i$ und Übergangsfunktionen (g_{ij}) bzw. (g'_{ij}) mit $g_{ij}, g'_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j, G)$ sind äquivalent genau dann, wenn gilt

$$\exists h_i \in C^\infty(U_i, G) \text{ mit } g_{ij} = h_i g'_{ij} h_j^{-1} \quad \forall i, j$$

Beweis. a) Betrachte

$$\tilde{P} = \dot{\cup}_{i \in I} \{i\} \times U_i \times G$$

mit der Äquivalenzrelation

$$(i, u, g) \sim (j, u', g') \iff u = u', g' = g_{ji}(u)g$$

und setze $P = \tilde{P} / \sim$. Definiere

$$\begin{aligned} q : P &\rightarrow M, & q([i, u, g]) &= u \\ \varphi_i : U_i \times G &\rightarrow q^{-1}(U_i), & (u, g) &\mapsto [i, u, g] \end{aligned}$$

und rechne nach, dass alle Bedingungen erfüllt sind.

- b) Definiere die Äquivalenzabbildung

$$\begin{array}{ccc} \varphi'_i(u, g) & \xrightarrow{\psi} & \varphi_i(u, h_i(u)g) \\ & \searrow q' & \swarrow q \\ & u & \end{array}$$

Dies ist wohldefiniert, da für $\varphi'_j(u, g) = \varphi'_j(u, g'_{ij}(u)g)$ gilt $\varphi_i(u, h_i(u)g'_{ij}(u)g) = \varphi_i(u, g_{ij}(u)h_j(u)g) = \varphi_j(u, h_j(u)g)$. Außerdem gilt $\psi(pg) = \psi(p)g$, da $\varphi_i(u, g) \cdot h = \varphi_i(u, gh)$.

Andersherum sei durch ψ eine Äquivalenz gegeben. Dann gilt auch $\psi(\varphi'_i(u, g)) = \varphi_i(u, g')$. Definiere $h_i : U_i \rightarrow G$, $h_i(u) = g'g^{-1}$. Dann gilt $\psi(\varphi'_j(u, g)) = \varphi_j(u, h_j(u)g) = \varphi_i(u, g_{ij}(u)h_j(u)g)$ und $\psi(\varphi'_j(u, g)) = \psi(\varphi'_i(u, g'_{ij}(u)g)) = \varphi_i(u, h_i(u)g'_{ij}(u)g)$, also $g_{ij}(u)h_j(u) = h_i(u)g'_{ij}$

□

Definition 11. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M , G Lie-Gruppe. Setze $I_1 = I$ und für $p > 1$

$$I_p := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in I^p : U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset\}.$$

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in I_p$ setze $U_\alpha := U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$.

$$C^p(\mathcal{U}, G) = \prod_{\alpha \in I_{p+1}} C^\infty(U_\alpha, G)$$

sei die Gruppe der Čech p -Koketten. Sei

$$\begin{aligned} d_0 : C^0(\mathcal{U}, G) &\rightarrow C^1(\mathcal{U}, G), & (g_i) &\mapsto (g_{ij}), & g_{ij} &= g_i g_j^{-1} \quad \text{und} \\ d_1 : C^1(\mathcal{U}, G) &\rightarrow C^2(\mathcal{U}, G), & (g_{ij}) &\mapsto (g_{ijk}), & g_{ijk} &= g_{ij} g_{jk} g_{ik}^{-1} \end{aligned}$$

Für G abelsch sei

$$d_2 : C^2(\mathcal{U}, G) \rightarrow C^3(\mathcal{U}, G), (g_{ijk}) \mapsto (g_{ijkl}), g_{ijkl} = g_{ijk}^{-1} g_{ijl} g_{ikl}^{-1} g_{jkl}$$

und allgemein

$$d_n : C^n(\mathcal{U}, G) \rightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, G), (g_{i_0, \dots, i_n}) \mapsto (g_{i_0, \dots, i_{n+1}}), g_{i_0, \dots, i_{n+1}} = \prod_{i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{n+1}}^{(-1)^k}$$

Seien

$$Z^p(\mathcal{U}, G) = \{g \in C^p(\mathcal{U}, G) : d_p g = 1\}$$

die Čech-Kozykel und

$$B^p(\mathcal{U}, G) = \{g \in C^p(\mathcal{U}, G) : g = d_{p-1} g' \text{ für } g' \in C^{p-1}(\mathcal{U}, G)\}$$

die Čech-Koränder. Rechne nach, dass $d^2 = 1$ und definiere

$$H^p(\mathcal{U}, G) = Z^p(\mathcal{U}, G) / B^p(\mathcal{U}, G)$$

als die p -te Čech Kohomologie (Gruppe nur für abelsch, $p \geq 2$ nur für abelsch).

Eine Verfeinerung von $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ mit einer Abbildung $\mu : J \rightarrow I$ mit $V_j \subseteq U_{\mu(j)}$ für alle $j \in J$.

Jede Verfeinerung induziert natürliche Abbildungen

$$C^p(\mathcal{U}, G) \rightarrow C^p(\mathcal{V}, G), (g_\alpha)_{\alpha \in I_{p+1}} \mapsto (g_{\mu(\beta)}|_{V_\beta})_{\beta \in J_{p+1}}$$

wobei $\mu(\beta_1, \dots, \beta_{p+1}) := (\mu(\beta_1), \dots, \mu(\beta_{p+1}))$. Also erhält man Abbildungen $H^p(\mathcal{U}, G) \rightarrow H^p(\mathcal{V}, G)$ und kann

$$\check{H}^p(M, G) := \varinjlim H^p(\mathcal{U}, G)$$

als zugehörigen direkten Limes definieren.

Proposition 12. $\text{Prin}_G(M) \cong \check{H}^1(M; G)$

Beweis. Es gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} Z^1(\mathcal{U}, G) &= \{g \in C^1(\mathcal{U}, G) : d_1 g = 1\} \\ &= \{(g_{ij}) \in \prod_{i,j} C^\infty(U_{ij}, G) : g_{ij} g_{jk} = g_{ik}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^1(\mathcal{U}, G) &= \{g \in C^1(\mathcal{U}, G) : g = d_0 g' \text{ für } g' \in C^0(\mathcal{U}, G)\} \\ &= \{(g_{ij}) \in \prod_{i,j} C^\infty(U_{ij}, G) : g_{ij} = g_i g_j^{-1} \text{ für } g_i \in C^\infty(U_i, G), g_j \in C^\infty(U_j, G)\} \end{aligned}$$

Also gilt $[(g_{ij})] = [(g'_{ij})] \iff g'_{ij} = g_i g_{ij} g_j^{-1} \forall i, j$

Nach Proposition 10 stellt $H^1(\mathcal{U}, G)$ also gerade die Äquivalenzklassen von Hauptfaserbündeln über M dar, für die $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung durch Trivialisierungen ist.

Durch den Limes über die Verfeinerung erhält man jetzt alle Äquivalenzklassen von Hauptfaserbündeln über M , da man für zwei verschiedene Überdeckung eine gemeinsame Verfeinerung betrachten kann. Somit gilt $\check{H}^1(M, G) \cong \text{Prin}_G(M)$

□

Bemerkung 13. Beim letzten Mal haben wir die Spin-Gruppe $\text{Spin}(n)$ konstruiert, wobei $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ zweifache Überlagerung und $\ker \rho = \{\pm 1\}$ gilt.

Also ist

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n) \rightarrow 1$$

exakt und somit ist $\text{Spin}(n)$ eine Lie-Gruppen-Erweiterung von $\text{SO}(n)$ um \mathbb{Z}_2 .

Definition 14. Sei M eine glatte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und P_{SO} das Bündel der orientierten orthonormalen Rahmen über M . Eine Spinstruktur auf M ist ein Spin-Hauptfaserbündel P_{Spin} zusammen mit einem vertikal Hauptfaserbündel-Morphismus $\Psi : P_{\text{Spin}} \rightarrow P_{\text{SO}}$ bzgl. $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$. Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Spin-Struktur heißt Spin-Mannigfaltigkeit.

Satz 15. Für $q : \hat{G} \rightarrow G$ eine Lie-Gruppen-Erweiterung mit Kern N ist die Sequenz

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \check{H}^0(M; N) &\rightarrow \check{H}^0(M; \hat{G}) \rightarrow \check{H}^0(M; G) \\ &\rightarrow \check{H}^1(M; N) \rightarrow \check{H}^1(M; \hat{G}) \rightarrow \check{H}^1(M; G) \end{aligned}$$

eine exakte Sequenz von punktierten Mengen. Falls zusätzlich N zentral in \hat{G} ist, so ist

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \check{H}^0(M; N) &\rightarrow \check{H}^0(M; \hat{G}) \rightarrow \check{H}^0(M; G) \\ &\rightarrow \check{H}^1(M; N) \rightarrow \check{H}^1(M; \hat{G}) \rightarrow \check{H}^1(M; G) \rightarrow \check{H}^2(M; N) \end{aligned}$$

exakt.

Beweis. siehe Skript-Stück „Non-abelian Čech cohomology“ □

Korollar 16. Für $N = \mathbb{Z}_2$, $\hat{G} = \text{Spin}(n)$, $G = \text{SO}(n)$ sei

$$w_2 : \check{H}^1(M; \text{SO}(n)) \rightarrow \check{H}^2(M; \mathbb{Z}_2)$$

die induzierte Abbildung. Dann gilt:

M trägt eine Spinstruktur genau dann, wenn $w_2(P_{\text{SO}}) = 0$.

Beweis. Nach dem Satz gilt Exaktheit, also

$$\text{Ker } w_2 = \text{Im}(\check{H}^1(M; \text{Spin}(n)) \rightarrow \check{H}^1(M; \text{SO}(n)))$$

Nach der Proposition ist $\text{Prin}_G(M) \cong \check{H}^1(M; G)$. Somit kommt $P_{\text{SO}} \in \text{Prin}_{\text{SO}(n)}(M) \cong \check{H}^1(M; \text{SO}(n))$ genau dann von einem $P_{\text{Spin}} \in \text{Prin}_{\text{Spin}(n)}(M) \cong \check{H}^1(M; \text{Spin}(n))$, wenn $w_2(P_{\text{SO}}) = 0$. □

Bemerkung 17. $w_2(P)$ wird auch 2. Stiefel-Whitney-Klasse genannt.

Beispiel 18. (assoziertes Spin-Bündel) Sei M eine Spin-Mannigfaltigkeit und P_{Spin} das zugehörige Spin-Hauptfaserbündel. Sei $\tau : \text{Spin}(n) \times V \rightarrow V$. Betrachtet man nun das assoziierte Bündel $P_{\text{Spin}} \times_{\text{Spin}(n)} V$ so hat man ein Faserbündel, dessen Übergangsfunktionen nach $\text{Spin}(n)$ gehen, das also „durch $\text{Spin}(n)$ zusammengeklebt“ wird.

Oft betrachtet man ein Vektorraum V und eine Darstellung von Spin auf V , $\sigma : \text{Spin} \rightarrow \text{GL}(V)$, und definiert τ durch $\tau(g, v) = \sigma(g)(v)$.