DARSTELLUNG KOMPAKTER GRUPPEN - TEIL 1

JOHANNES THÜRIGEN

Diese Grundlage und Ausarbeitung meines Vortrages am 27.IX 2008 beim Wissenschaftlichen Kolleg in Aachen orientiert sich sehr eng an den Abschnitten 4.1 bis 4.3 von [DK00], insbesondere verwende ich zur leichteren Vergleichbarkeit auch dieselbe Nummerierung.

1. Grundlegende Begrifflichkeiten der Darstellungstheorie und Schur's Lemma

Eine Darstellung (π, V) der Gruppe G besteht aus einem Vektorraum V und einem Gruppenhomomorphismus $\pi : G \to GL(V)$. Damit ist äquivalenterweise eine Wirkung $(g, v) \mapsto \pi(g)v$ gegeben.

Für den gesamten folgendem Vortrag werden dazu stetige Strukturen benötigt, auf differenzierbare Strukturen kann hier verzichtet werden; es seien also, soweit nicht anders bemerkt, G eine topologische Gruppe und V ein topologischer $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Der Begriff einer Darstellung (π, V) fordert dann zusätzlich die Stetigkeit der entsprechenden Wirkung.

Wichtige Beispiele für Darstellungen sind die Linksreguläre Darstellung $(L, C(G))$ definiert durch $(g, f) \mapsto L(g)f := f(g^{-1}\cdot)$ sowie die Rechtsreguläre Darstellung $(R, C(G))$ definiert durch $(g, f) \mapsto R^*(g)f := f(\cdot g)$. Diese definierenden Wirkungen kommutieren und man nennt ihre Komposition Reguläre Darstellung $(L\times R^*, C(G))$ von $G \times G$ mit $((g, h), f) \mapsto (L(g) \times R^*(h))(f) := (L(g) \circ R^*(h))(f) = f(g^{-1} \cdot h)$.

Ein Unterraum $U \in V$ heißt $\pi(G)$-invariant, wenn $\pi(g)U \subset U$.
Irreduzibel nennt man eine Darstellung, wenn es nur triviale invariante Unterräume gibt.

(π, V) ist vollständig zerlegbar, wenn für $U \in V$ invarianter Unterraum ein invarianter Unterraum U' existiert, so dass $V = U \bigoplus U'$.
Falls V ein Hilbertraum ist, nennt man (π, V) unitär, wenn
$\langle v, w\rangle = \langle\pi(g)v, \pi(g)w\rangle \, \forall g \in G$.

Man definiert die kontragradiente Darstellung in den Dualraum, $(\check{\pi}, V^\star)$, durch $\check{\pi}(g) := \pi(g^{-1})^\star$ und die (äußere) Tensorproduktdarstellung $(\check{\sigma} \otimes \tau, L(V, U))$ von $G \times G$ in den Raum $V^\star \otimes U \cong L(V, U)$ durch $((g, h), A) \mapsto (\check{\sigma} \otimes \tau)(g, h)(A) := \tau(h) \circ A \circ \sigma(\tau)$.

Eine lineare Abbildung $\phi : V \to U$ heißt Verkettungsoperator zweier Darstellungen (σ, V) und (τ, U), wenn $\phi \circ \sigma(g) = \tau(g) \circ \phi$. Der Raum solcher Verkettungsoperatoren ist ein linearer Unterraum $I(\sigma, \tau) \subset L(U, V)$, $I(\sigma, \sigma) \subset L(U, U)$ ist mit Matrixmultiplikation sogar Unteralgebra.

Betrachtet man Darstellungen (π, V) der Gruppe G als G-Moduln V mit Modulmultiplikation $g \cdot v = \pi(g)v$, dann lassen sich die Verkettungsoperatoren gerade als Morphismen der Modulkategorie betrachten, also $I(\sigma, \tau) = Hom_G(V, U)$.

Die Darstellungen heißen äquivalent, $[\sigma] = [\tau]$, wenn es einen bijektiven Verkettungsoperator gibt. Die Menge solcher Äquivalenzklassen ist $\hat{G}$, das Duale zu G.

Lemma. *Schur's Lemma (4.1.1)*

G beliebige Gruppe, (σ,V) und (τ,U) irreduzible Darstellungen in endlich-dimensionale Vektorräume. Dann

i) ist jeder Verkettungsoperator $0 \neq L \in I(\sigma, \tau)$ ein Isomorphismus und somit dann $[\sigma] = [\tau]$,

ii) ist $I(\sigma, \sigma)$ eine Divisionsalgebra, speziell $I(\sigma, \sigma) = (zI | z \in \mathbb{C})$,

iii) falls $I(\sigma, \tau) \neq \{0\}$ ist, dann ein eindimensionales Linksmodul über $I(\tau, \tau)$ bzw. Rechtsmodul über $I(\sigma, \sigma)$.

Beweis. Da $(L \circ \sigma(g))(u) = (\tau(g) \circ L)(u)$ ist Ker(L) $\sigma(g)$-invariant und $L(U)$ $\tau(g)$-invariant. Wegen der Irreduzibilität der Darstellungen und weil $L \neq 0$ ist damit Ker(L)=0 und $L(U) = V$. Damit ist L ein Isomorphismus.

Mit der Verkettung als Multiplikation ist $I(\sigma, \sigma)$ eine Algebra, nach 1. sogar eine Divisionsalgebra. Für $A \in I(\sigma, \sigma)$ und $c \in \mathbb{C}$ ist $A - cI \in I(\sigma, \sigma)$ und aufgrund der Endlichdimensionalität von U existiert die Determinante $\det(A - cI)$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so dass $\det(A - cI) = 0$, d.i. $A - cI$ nicht invertierbar, also $A = cI$.

3. ist klar mit 1. und 2. □

Corollary. *(4.1.2)*

Sei G abelsch. Dann ist jede endlich-dimensionale irreduzible Darstellung (π, V) eindimensional.

Beweis. Die Elemente der Darstellung kommutieren, so dass für ein beliebiges $x \in G$ dessen Darstellung $\pi(x)$ ein Verkettungsoperator in $I(\pi, \pi)$ ist und somit nach Schur's Lemma $\pi(x) = c_x I$. Damit erhält man einen eindimensionalen, $\pi(G)$-invarianten Unterraum von V, der wegen der Irreduzibilität von (π, V) schon mit V identisch sein muss. □

2. Das Haar'sche Mass

Ab hier sei G bis auf Weiteres eine KOMPAKTE, topologische Gruppe, V ein lokal konvexer, vollständiger, topologischer Vektorraum.

Dann hat G ein eindeutiges, linksinvariantes Maß $C(G) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_G f(x)\mathrm{dx}$, das Haar'sche Maß. Dabei ist $\int_G \mathrm{dx} = 1$.

Es lässt sich auf stetige Funktionen $f \in C(G, V)$ erweitern. Dann gilt für stetige Linearformen $\mu \in V^*$, dass $\mu \circ f \in C(G)$ und $\mu(\int_G f(x)\mathrm{dx} = \int_G \mu(f(x))\mathrm{dx}$.

Desweiteren ist für eine Darstellung (π, V) und $f \in C(G)$ die Abbildung $\pi(f) : V \to V$ definiert als

$$\pi(f)(v) := \int_G f(x)\pi(x)v\mathrm{dx}, \text{ stetig.}$$

Von besonderem Interesse ist der Spezialfall des Mittelungsoperators $av(\pi) := \pi(id)$. Für ihn gilt die

Proposition. *(4.2.1)*
$av(\pi)$ ist eine lineare Projektion $V \to V^\pi := \{v \in V | \pi(x)v = v\}$.
Falls V ein Hilbertraum und (π, V) unitär, ist $av(\pi)$ eine orthogonale Projektion.

Corollary. *(4.2.2) Sei V ein Hilbertraum. Dann gibt es für eine Darstellung (π, V) ein Skalarprodukt auf V mit gleicher induzierter Topologie, so dass (π, V) unitär wird. Wegen 4.2.1 ist (π, V) dann vollständig zerlegbar.*

Insbesondere ist jede Darstellung in einen endlich-dimensionalen Vektorraum V vollständig zerlegbar und V lässt dich als direkte Summe von Unterräumen schreiben, auf die eingeschränkt die Darstellung irreduzibel ist.

Beweis. Mit Abschätzungen nach Banach-Steinhaus lässt sich zeigen, dass das Skalarprodukt $\langle\langle v, w\rangle\rangle := \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w\rangle \, dg$ die gleiche Topologie induziert (cf. [DK00], S. 217). Aufgrund der Invarianz des Haar'schen Maßes ist es unitär.

Für endlich-dimensionale Vektorräume lässt sich immer ein Skalarprodukt finden. Nach der Unitarisierung der Darstellung wie oben lässt sich die direkte Summe dann mit Induktion konstruieren. □

Für Operatoren mit endlichem Rang, sogenannten Hilbert-Schmidt-Operatoren, $L, M \in L(U, V)_{HS}$, lässt sich als Skalarprodukt das Hibert-Schmidt-Produkt definieren, $\langle L, M\rangle := tr(M^* \circ L)$, wobei M^* den adjungierten Operator zu M bezeichnet.

Corollary. *(4.2.3) $av(\check{\sigma} \otimes \tau)(g, g)|_{L(U,V)_{HS}}$ ist die orthogonale Projektion von Hilbert-Schmidt-Operatoren auf solche, die auch Verkettungsoperatoren sind, $L(U, V)_{HS} \to L(U, V)_{HS} \cap I(\sigma, \tau)$.*

Beweis. Nach Definition der Tensorproduktdarstellung verkettet ein $A \in L(V, U)$ die Darstellungen genau dann, wenn $(\check{\sigma} \otimes \tau)(g, g)(A) := \tau(g) \circ A \circ \sigma(g) = A$, also wenn $A \in L(V, U)^{\check{\sigma}\otimes\tau}$. Mit 4.2.1 folgt damit die Behauptung. Die Orthogonalität erhält man mit der Hilbert-Schmidt-Eigenschaft. □

3. Matrizenkoeffizienten, Charaktere und deren Orthogonalitätsrelationen

Es werden nun stetige Funktionen der Form $\mu \circ \pi : G \to \mathbb{C}$ für endlich dimensionale Darstellungen (π, V) betrachtet mit Linearform $\mu \in L(V, V)^*$. (In diesem Abschnitt sollen alle Vektorräume endlich dimensional sein.) Es zeigt sich, dass solche Funktionen vollkommen äquivalent für ein $L \in L(V, V)$ als $x \mapsto tr(\pi(x) \circ L)$ dargestellt werden können, da die Spur eine nichtausgeartete (symmetrische) Bilinearform ist. Man bezeichnet solche Funktionen

$$M_\pi := \{m_{\pi,L} : x \mapsto tr(\pi(x) \circ L) | L \in L(V, V)\} = \{\mu \circ \pi | \mu \in L(V, V)^*\} \subset C(G)$$

als Matrizenkoeffizienten der Darstellung (π, V). Wir können die Matrizenkoeffizienten damit auch als Elemente des Hilbertraums $L^2(G) \supset C(G)$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_G f(x)\overline{g(x)} dx$ auffassen. Von besonderem Interesse ist dabei der Spezialfall $\chi_\pi := m_{\pi,I}$, der sogenannte Charakter einer Darstellung. Man nennt $d_\pi := \chi_\pi(1)$ den Grad der Darstellung. Im Folgendem wird sich herausstellen, dass der Charakter tatsächlich schon die gesamte Information einer Darstellung enthält.

Aufgrund der Zyklizität der Spur ist der Charakter eine Klassenfunktion, d.i. konjugationsinvariant: $\chi_\pi(gxg^{-1}) = \chi_\pi(x)$. Von weiteren Eigenschaften der Spur sieht man $\overline{\chi_\pi(x)} = \chi_\pi(x^{-1}) = \chi_{\check{\pi}}(x)$.

Die folgenden drei Lemmata über weitere Eigenschaften der Matrizenkoeffizienten bereiten den Beweis der Orthogonalitätsrelationen vor:

Lemma. *(4.3.1) Die Abbildung $m_\pi : A \mapsto m_{\pi,A}$ ist eine lineare Abbildung $L(V,V) \to C(G)$ und verkettet die Tensorproduktdarstellung $(\check{\pi} \otimes \pi, L(V,V))$ mit der regulären Darstellung $(L \times R^*, C(G))$. Insbesondere ist $M_\pi = m_\pi(L(V,V))$ ein unter Links- bzw. Rechtswirkung invarianter Unterraum von $C(G)$ mit $\dim M_\pi \leq d_\pi^2$.*

Beweis. Die Linearität folgt aus den Eigenschaften der Spur direkt. Für die Verkettung sei $(g,h) \in G \times G$, $A \in L(V,V)$. Dann $(m_\pi \circ (\check{\pi} \otimes \pi)(g,h))(A)(x) = m_{\pi,\check{\pi}\otimes\pi(g,h)(A)}(x) = tr(\pi(x) \circ \pi(h) \circ A \circ \pi(g^{-1})) = tr(\pi(g^{-1}) \circ \pi(x) \circ \pi(h) \circ A)$

$$= tr(\pi(g^{-1}xh) \circ A) = m_{\pi.A}(g^{-1}xh) = ((L \times R^*)(g,h) \circ m_\pi)(A)(x)$$

Damit ist $m_\pi \in I(\check{\pi} \otimes \pi, L \times R^*) = Hom_{G\times G}(L(V,V), C(G))$ und die Invarianz ist offensichtlich. □

Lemma. *(4.3.2) Sei für $A \in L(V,V)$ und $B \in L(U,U)$ eine Abbildung $A \odot B : L(V,U) \to L(V,U)$ definiert über $A \odot B(C) := B \circ C \circ A$. Dann ist*

$$tr(B \odot A) = tr(B)tr(A),$$

insbesondere $\chi_{\check{\sigma}\otimes\tau}(g,h) = \chi_\sigma(g^{-1})\chi_\tau(h)$ für Darstellungen (σ, V), (τ, U).

Beweis. Rechnung in einer gewählten Basis. Der zweite Teil ergibt sich mit $A = \sigma(g^{-1})$ und $B = \tau(h)$. □

Lemma. *(4.3.3) Seien (σ, V) und (τ, U) unitäre Darstellungen in Hilberträume, A,B wie oben. Dann ist*

$$\langle m_{\tau,B}, m_{\sigma,A}\rangle = tr_{L(U,V)}(av(\check{\sigma} \otimes \tau) \circ B \odot A^*).$$

Beweis. Wegen $\overline{tr(\sigma(x) \circ A)} = tr((\sigma(x) \circ A)^*) = tr(A^* \circ \sigma(x^{-1}))$ ist
$tr(\tau(x) \circ B)\overline{tr(\sigma(x) \circ A)} = tr((\tau(x) \circ B) \odot (A^* \circ \sigma(x^{-1}))$
$tr((\tau(x) \odot \sigma(x^{-1})) \circ (A \odot B)) = tr((\check{\sigma} \otimes \tau)(x) \circ (B \odot A^*))$.
Mit Integration über G erhält man die Behauptung. □

Theorem. *(Die Orthogonalitätsrelationen)*

Seien (σ, V) und (τ, U) irreduzible, unitäre Darstellungen in endlich-dimensionale Hilberträume. Dann

i) falls $[\sigma] \neq [\tau]$ ist $M_\sigma \perp M_\tau$ in $L^2(G)$,

ii) $\langle m_{\sigma,A}, m_{\tau,B}\rangle = \frac{1}{d_\sigma} \langle A, B\rangle_{HS}$ $\forall A, B \in L(V,V)$,

iii) durch $m_\sigma : A \mapsto m_{\sigma,A}$ als Verkettungsoperator ist $[\check{\sigma} \otimes \tau] = [L \times R^*]$ und $\dim M_\sigma = d_\sigma^2$,

iv) Die Charaktere $\{\chi_\pi\}_{[\pi]\in\hat{G}}$ bilden ein Orthonormalsystem in $L^2(G)$.

Beweis. i) Nach Schur's Lemma ist $I(\sigma, \tau) = \{0\}$, nach 4.2.3 also $av(\check{\sigma} \otimes \tau) = 0$. Dann folgt mit 4.3.3 die Behauptung.

ii)

iii) Definitionsgemäß ist $m_\sigma : L(V,V) \to M_\sigma$ surjektiv, durch die Orthogonalitätsrelation ii) auch injektiv. Dass m_σ Verkettungsoperator ist, hat 4.3.1 gezeigt, womit die Äquivalenz klar ist. Die Isomorphie der Darstellungen liefert dann gleiche Dimension ihrer Vektorräume.

iv) Die Orthogonalität folgt aus i), die Normierung aus ii) mit $A = B = I$: $\langle \chi_\sigma, \chi_\sigma\rangle = \frac{1}{d_\sigma} tr(I) = \frac{1}{d_\sigma} d_\sigma = 1$. □

Inwieweit enthält damit der Charakter einer Darstellung (σ, V) nun ihre gesamte Information?

In 4.2.2 sah man, dass man V zerlegen kann $V = \oplus V_j$, also in irreduzible Darstellungen $(\sigma \restriction_{V_j}, V_j)$. Die Anzahl dieser $\sigma|_{V_j} \in [\pi]$ nennt man Vielfachheit oder Multiplizität $[\sigma : \pi]$ und sie lässt sich wegen der Orthonormalität der Charaktere zu $[\sigma : \pi] = \langle \chi_{sigma}, \chi_\pi \rangle$ berechnen. Damit kann man die Irreduzibilität einer Darstellung nun leicht über die Forderung $\langle \chi_\sigma, \chi_\sigma \rangle = 1$ überprüfen. Außerdem lässt sich zeigen, dass $[\sigma] = [\tau]$ genau dann wenn $\chi_\sigma = \chi_\tau$ (cf. [DK00] S. 224, Korollar 4.3.5).

Literatur

[DK00] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Lie Groups.* Springer 2000
[BtD85] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer 1985