

Natur- und Ingenieurwissenschaftliches Kolleg

Bad Honnef 31.03.2008 bis 04.04.2008

Arbeitsgruppe 1

Der Satz von Malcev und reduktive Liealgebren

Maximilian Poretschkin

Nachdem im vorigen Vortrag gezeigt worden ist, dass jede endlichdimensionale Liealgebra \mathfrak{g} ein Levikomplement besitzt, stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit. Eine Antwort gibt der folgende

Satz (Malcev): Die Levi - Komplemente sind konjugiert unter der Gruppe der inneren Automorphismen. Genauer: Zu zwei Levikomplementen \mathfrak{s} und \mathfrak{s}' in \mathfrak{g} existiert ein $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ mit $e^{adx} \mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$. (Hierbei bezeichnet \mathfrak{r} das Radikal)

Der Beweis wird über Induktion nach der Dimension des Radikals geführt. Für den Induktionsschritt teilen wir ein minimales Ideal \mathfrak{m} , das im Zentrum von $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ enthalten ist, aus \mathfrak{g} heraus und nutzen dabei, dass das homomorphe Bild des Radikals das Radikal des Bildes ist. Weiterhin sind die Bilder der Levikomplemente wieder Levikomplemente in der Quotientenalgebra. Aufgrund der kleineren Dimension der Quotientenalgebra greift die Induktionsvoraussetzung. Es folgt, dass $e^{adx} \mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{s} + \mathfrak{m}$. Da die Dimension von \mathfrak{m} (welches das Radikal von $\mathfrak{s} + \mathfrak{m}$ ist) kleiner als die von \mathfrak{r} ist, kann die Existenz eines $y \in \mathfrak{m}$ gefolgert werden und zusammen mit der Tatsache, dass \mathfrak{m} im Zentrum von $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ enthalten ist, folgt endlich: $e^{ad(x+y)} \mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$. Eine sorgfältigere Analyse des hier gegebenen Beweises zeigt, dass die Fälle $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = 0$ und \mathfrak{r} minimal (und nichttrivial) gesondert behandelt werden müssen.

Der Satz von Malcev besitzt interessante Konsequenzen, welche wir hier ohne Beweis kurz auflisten:

- Jede halbeinfache Unter algebra einer Liealgebra ist in einem Levikomplement enthalten. Genauer: Die Levikomplemente sind gerade die maximalen halbeinfachen Unter algebren der Liealgebra.
- Es sei $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal einer Liealgebra. $\mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$ sei eine Levizerlegung von \mathfrak{g} , dann ist $\mathfrak{n} = (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{n}) \rtimes (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{n})$ eine Levizerlegung von \mathfrak{n} .

Nun zu den reductiven Liealgebren, welche wir zunächst einmal definieren müssen:

Definition: Eine endlichdimensionale Liealgebra \mathfrak{g} heißt reduktiv, falls \mathfrak{g} ein halbeinfacher Modul in Bezug auf die adjungierte Darstellung ist. Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ gibt es also ein Ideal $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

Aussagen über reductive Liealgebren trifft das folgende

Lemma: Für eine reductive Liealgebra \mathfrak{g} gilt:

- Falls $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal ist, dann sind auch \mathfrak{n} und $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ reduktiv.
- $z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ist halbeinfach. (hierbei bezeichnet z das Zentrum)
- \mathfrak{g} ist halbeinfach genau dann wenn $z(\mathfrak{g}) = \{0\}$

Leicht folgert man nun folgende äquivalente Aussagen:

- \mathfrak{g} ist reduktiv
- $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ist halbeinfach
- $z(\mathfrak{g}) \subseteq \text{rad}(\mathfrak{g})$