

Klassifikation nicht-notwendig abelscher Erweiterungen

Wir hatten bereits in einem vorigen Vortrag abelsche Erweiterungen von Lie-Algebren studiert. Zur Erinnerung: unter einer Erweiterung einer Lie-Algebra \mathfrak{g} um \mathfrak{n} verstanden wir eine kurze exakte Sequenz

$$\mathfrak{n} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$$

von Lie-Algebren, und wir haben sie abelsch genannt, falls \mathfrak{n} abelsch war. Abelsche Erweiterungen lassen sich leichter charakterisieren als nicht-abelsche Erweiterungen, denn jede abelsche Erweiterung $\mathfrak{n} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$ induziert eine \mathfrak{g} -Modul-Struktur auf \mathfrak{n} vermöge $g \cdot n := [\hat{g}, n]$, wobei $\hat{g} \in \pi^{-1}(g)$ beliebig gewählt sei. Die Wohldefiniertheit dieser Operation ist durch die Kommutativität von \mathfrak{n} gewährleistet, ist diese jedoch nicht gegeben, so liefern verschiedene Urbilder \hat{g} von g eventuell verschiedene Elemente $[\hat{g}, n]$; die obige Konstruktion lässt sich also im Falle nicht-abelscher Erweiterungen nicht durchführen. Dort leistet der Begriff des sog. \mathfrak{g} -Kernes Abhilfe.

Definition 1 (\mathfrak{g} -Kern):

Ein \mathfrak{g} -Kern in \mathfrak{n} ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus $\mathfrak{g} \rightarrow \text{out}(\mathfrak{n})$, wobei $\text{out}(\mathfrak{n}) := \text{der}(\mathfrak{n})/\text{ad}(\mathfrak{n})$.

Induziert eine abelsche Erweiterung durch $g \mapsto \text{ad}(\hat{g})|_{\mathfrak{n}}$ noch einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\mathfrak{g} \rightarrow \text{der}(\mathfrak{n})$, so induziert eine beliebige Erweiterung $\mathfrak{n} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$ einen \mathfrak{g} -Kern in \mathfrak{n} durch $g \mapsto [\text{ad}(\hat{g})|_{\mathfrak{n}}]$. Dieser induzierte \mathfrak{g} -Kern hängt nur vom Isomphietyp der betrachteten Erweiterung ab. Das Problem der Klassifikation aller Erweiterungen von \mathfrak{g} durch \mathfrak{n} ist daher gelöst, wenn wir für jeden \mathfrak{g} -Kern $s : \mathfrak{g} \rightarrow \text{out}(\mathfrak{n})$ die Menge $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})_s$ der Isomorphieklassen von Erweiterungen, die den gegebenen Kern s induzieren, beschreiben können. Dieses Problem zerfällt weiterhin in zwei Teilprobleme:

- Bestimme alle \mathfrak{g} -Kerne s mit $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})_s \neq \emptyset$. Solche Kerne heißen 'integrabel'.
- Beschreibe $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})_s$ für einen integrablen \mathfrak{g} -Kern s .

Wichtig für die Lösung beider Probleme sind sog. Faktorsysteme:

Definition 2 (Faktorsystem):

Es sei $s : \mathfrak{g} \rightarrow \text{out}(\mathfrak{n})$ ein \mathfrak{g} -Kern in \mathfrak{n} . Ein Faktorsystem für s ist ein Paar (S, ω) , wo $S : \mathfrak{g} \rightarrow \text{der}(\mathfrak{n})$ k -linear und $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{n}$ k -bilinear ist, sodass für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $[S(x)] = s(x)$
2. $[S(x), S(y)] - S([x, y]) = \text{ad}\omega(x, y)$
3. $d_S(\omega)(x, y, z) := \sum_{\text{cyc}} S(x)\omega(y, z) - \omega([x, y], z) = 0$

Die Motivation für die Bedingungen (2) und (3) liegen in der Tatsache, dass die durch

$$[(n, g), (n', g')] := ([n, n'] + S(g)n' - S(g') + \omega(g, g'), [g, g'])$$

gegebene Bilinearform auf $\mathfrak{n} \times \mathfrak{g}$ genau dann eine Lie-Klammer definiert, wenn (2) und (3) erfüllt sind. Die auf diese Weise von einem Faktorsystem (S, ω) induzierte Lie-Algebra wird mit $\mathfrak{n} \times_{(S, \omega)} \mathfrak{g}$ bezeichnet.

Umgekehrt kann man zu einer s induzierenden Erweiterung $\mathfrak{n} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$ eine k -lineare Spaltung $S : \mathfrak{g} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$ mit $[S(x)] = s(x)$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ wählen. Die beliebige Wahl eines bilinearen ω , das Bedingung (3) erfüllt, zusammen mit einigen kurzen Rechnungen zeigen dann, dass sogar jede solche Erweiterung isomorph zu $\mathfrak{n} \times_{(S, \omega)} \mathfrak{g}$ für ein geeignetes Faktorsystem (S, ω) für s ist.

Die vollständige Beschreibung von $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})_s$ für einen integrablen \mathfrak{g} -Kern s liefert nun der folgende Satz:

Satz 1:

Es sei $s : \mathfrak{g} \rightarrow \text{out}(\mathfrak{n})$ integrabel und $S : \mathfrak{g} \rightarrow \text{der}(\mathfrak{n})$ linear mit $[S(x)] = s(x)$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Dann ist jede Erweiterung von \mathfrak{g} durch \mathfrak{n} , die s induziert, isomorph zu einem Produkt $\mathfrak{n} \times_{(S,\omega)} \mathfrak{g}$ für ein Faktorsystem (S,ω) . Ist (S,ω) ein beliebiges Faktorsystem, so ist durch $[\eta] \mapsto [\mathfrak{n} \times_{(S,\omega+\eta)} \mathfrak{g}]$ eine wohldefinierte Bijektion zwischen $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{n}))$ und $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})_s$ gegeben.

Kommen wir nun zu der Frage, wann ein gegebener Kern $s : \mathfrak{g} \rightarrow \text{out}(\mathfrak{n})$ integrabel ist. Die obigen Überlegungen zeigen, dass s genau dann integrabel ist, wenn ein Faktorsystem (S,ω) für s existiert. Versuchen wir, ein solches zu konstruieren, so können wir zunächst ein k -lineares $S : \mathfrak{g} \rightarrow \text{der}(\mathfrak{n})$ wählen, das Bedingung (1) aus der Definition des Faktorsystemes erfüllt. Ebenso kann stets ein bilineares ω gefunden werden, sodass auch Bedingung (2) erfüllt ist. Hindernis ist nun, dass Bedingung (3) nach diesen Wahlen in der Regel nicht mehr erfüllt ist, die Funktion $d_S\omega$ also nicht verschwindet. Es gelten jedoch folgende Sätze:

Lemma 1:

Die Abbildung $d_S\omega$ nimmt ausschließlich Werte in $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ an. Sie ist ein Zykel in $Z^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{n}))$.

Lemma 2:

Die durch $d_S\omega$ repräsentierte Kohomologieklassse $[d_S\omega] \in H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{n}))$ hängt nicht von der Wahl von \mathfrak{n} und \mathfrak{g} ab. Sie wird mit $\chi(s)$ bezeichnet.

Nach dieser Vorarbeit kann die Integrabilität von s leicht durch $\chi(s)$ ausgedrückt werden:

Satz 2:

Der Kern $s : \mathfrak{g} \rightarrow \text{out}(\mathfrak{n})$ ist genau dann integrabel, wenn $\chi(s) \neq 0$.

Beweis: Ist s integrabel, so existiert ein Faktorsystem (S,ω) für s . Für dieses ist nach Definition $d_S\omega = 0$, d.h. $\chi(s) = [d_S\omega] = 0$.

Ist umgekehrt $\chi(s) = 0$ und (S,ω) wie oben gewählt, so existiert ein bilineares $\eta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ sodass $d_{\mathfrak{g}}\eta = d_S\eta = d_S\omega$. Es folgt $d_S(\omega - \eta) = 0$. Dann ist $(S,\omega + \eta)$ ein Faktorsystem für s und somit $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})_s \neq \emptyset$. 