Auflösbare Lie-Algebren

Jonas Lührmann

17. April 2008

1 Einleitung

In diesem Abschnitt befassen wir uns eingehender mit den sogenannten auflösbaren Lie-Algebren. Dabei handelt es sich um eine interessante, aber recht 'kleine' Klasse von Lie-Algebren, zu der unter anderem auch die nilpotenten Lie-Algebren gehören. Ihre Struktur steht in starkem Kontrast zu derjenigen der halbeinfachen Lie-Algebren, welche im nächsten Kapitel diskutiert werden.
Im ersten Teil dieses Kapitels beweisen wir das *Theorem von Lie*, welches eine schöne Aussage über die Darstellung nilpotenter Lie-Algebren macht. Im Anschluss leiten wir das *Theorem von Cartan* her und erhalten so ein Kriterium, mit dem wir anhand der Eigenschaften der einzelnen Elemente einer Lie-Algebra entscheiden können, ob diese auflösbar ist.

2 Definition

(a) Sei $\mathbf{g}$ eine Lie-Algebra. Dann definieren wir die *Kommutatorreihe* von $\mathbf{g}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} D^0(\mathbf{g}) &:= \mathbf{g} \\ D^n(\mathbf{g}) &:= [D^{n-1}(\mathbf{g}), D^{n-1}(\mathbf{g})] \end{aligned}$$

(b) Mann nennt eine Lie-Algebra *auflösbar*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $D^n(\mathbf{g}) = \{0\}$.

3 Bemerkung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $D^n(\mathbf{g}) < \mathbf{g}$ eine Unteralgebra von $\mathbf{g}$ mit $D^n(\mathbf{g}) \subset D^{n-1}(\mathbf{g})$.

Die Elemente der Kommutatorreihe $D^n(\mathbf{g})$ sind sogar Ideale von $\mathbf{g}$, also gilt $D^n(\mathbf{g}) \lhd \mathbf{g}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Somit ist die Kommutatorreihe eine absteigende Reihe von Idealen in $\mathbf{g}$.

4 Beispiele

(i) Die *Oszillator-Algebra* ist auflösbar, aber nicht nilpotent.

(ii) Jede nilpotente Lie-Algebra $\mathbf{g}$ ist auflösbar, denn es gilt $D^n(\mathbf{g}) \subset C^{n+1}(\mathbf{g})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5 Satz: Eigenschaften auflösbarer Lie-Algebren

(i) Sei $\mathbf{g}$ eine auflösbare Lie-Algebra. Dann sind alle Unteralgebren und homomorphen Bilder von $\mathbf{g}$ ebenfalls auflösbar.

(ii) Auflösbarkeit ist eine *Erweiterungseigenschaft*:
Seien $\mathbf{i} \lhd \mathbf{g}$ und $\mathbf{g}/\mathbf{i}$ auflösbar. Dann ist auch $\mathbf{g}$ auflösbar.

(iii) Seien $\mathbf{i}, \mathbf{j} \lhd \mathbf{g}$ auflösbar, dann ist auch $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ auflösbar.

(iv) Sei $\mathbf{i} \lhd \mathbf{g}$ ein Ideal von $\mathbf{g}$. Dann sind auch alle Elemente der Kommutatorreihe $D^n(\mathbf{i}) \lhd \mathbf{g}$ Ideale von $\mathbf{g}$.

6 Definition: Radikal

Das größte auflösbare Ideal einer Lie-Algebra $\mathbf{g}$ wird als *Radikal* von $\mathbf{g}$ bezeichnet.

Schreibweise: $\mathrm{rad}(\mathbf{g})$

7 Theorem

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum ungleich Null und $\mathbf{g}$ eine auflösbare Unteralgebra von $\mathbf{gl}(V)$. Dann existiert ein von Null verschiedener Eigenvektor v von $\mathbf{g}$, d.h.

$$\mathbf{g}(v) \subset \mathbb{C}v$$

8 Lie's Theorem

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathbf{g}$ eine auflösbare Unteralgebra von $\mathbf{gl}(V)$. Dann existiert eine vollständige $\mathbf{g}$-invariante Fahne in V.
Anders formuliert, existiert unter den obigen Voraussetzungen eine Basis von V bezüglich derer alle Elemente von $\mathbf{g}$ durch obere Dreiecksmatrizen darstellbar sind!

9 Korollar

Eine Lie-Algebra $\mathbf{g}$ ist genau dann auflösbar, wenn ihre Kommutatoralgebra $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ nilpotent ist.

10 Theorem: Cartan's Kriterium für Auflösbarkeit

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $\mathbf{g} < \mathbf{gl}(V)$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathbf{g}$ ist auflösbar.

(ii) $tr(xy) = 0$ für alle $x \in [\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ und $y \in \mathbf{g}$.

11 Korollar

Sei $\mathbf{g}$ eine Lie-Algebra. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathbf{g}$ ist auflösbar.

(ii) $tr(ad(x)\, ad(y)) = 0$ für alle $x \in [\mathbf{g}, \mathbf{g}]$ und $y \in \mathbf{g}$.