

Hamiltonsche Wirkungen und koadjungierte Bahnen kompakter Lie-Gruppen (Zusammenfassung)

Norman Metzner

Allgemeines

Eine Symmetrie wird durch die Wirkung einer (Lie-) Gruppe G auf einer Menge X (z.B. einer Mannigfaltigkeit oder einem Vektorraum) modelliert. Punkte auf demselben Orbit sind dabei physikalisch äquivalent. Deshalb interessiert man sich oft für die Zerlegung von Darstellungen in ihre irreduziblen Anteile oder den Raum der Bahnen im Falle einer Mannigfaltigkeit, denn diese sind invariant unter Wirkung von G und repräsentieren damit einen physikalischen Zustand.

Wir werden uns nun näher mit dem Fall beschäftigen, in dem G eine (kompakte) Lie-Gruppe ist, die auf einer glatten Mannigfaltigkeit M wirkt. Die Abbildung σ wird dabei als glatt vorausgesetzt.

1 Mannigfaltigkeitsstruktur auf Bahnen

Der Stabilisator G_m von m ist eine eingebettete Lie-Untergruppe von G .

Satz. Sei (M, G, σ) eine G -Mannigfaltigkeit, sei $m \in M$ und \mathcal{O} der Orbit von m . Die Menge der Nebenklassen G/G_m trägt eine Mannigfaltigkeitsstruktur und die Orbitabbildung σ_m induziert eine injektive Immersion

$$G/G_m \rightarrow M,$$

deren Bild gerade \mathcal{O} ist. Das heißt, ist \mathcal{O} eine (immersierte) Untermannigfaltigkeit von M . In dem Fall einer kompakten Lie-Gruppe G ist G/G_m sogar eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M .

2 Abgeleitete Wirkung der Lie-Algebra und induzierte Wirkung auf Formen

Definition. Sei G eine Lie-Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine glatte Gruppenwirkung. Man bezeichnet dann die Abbildung

$$\dot{\sigma} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad \dot{\sigma}(\xi)_m := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\exp t\xi) \cdot m)$$

als *Ableitung von σ* .

Proposition. Sei G eine Lie-Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine glatte Gruppenwirkung, dann gilt:

$$(i) \quad [\dot{\sigma}(\xi), \dot{\sigma}(\eta)] = \dot{\sigma}([\eta, \xi]) \text{ für alle } \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

(ii) $\sigma_g \cdot (\dot{\sigma}(\xi)) = \dot{\sigma}(\text{Ad}(g)\xi)$ für alle $g \in G$ und $\xi \in \mathfrak{g}$. Dabei ist $\sigma_g \cdot (\dot{\sigma}(\xi)) = (\sigma_g)_*(\dot{\sigma}(\xi))$ das Pushforward des Vektorfeldes $\dot{\sigma}(\xi)$ mit der Abbildung σ_g .

Definieren wir $L\sigma = -\dot{\sigma}$, dann erhalten wir einen Homomorphismus von Lie-Algebren $L\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(M)$. Auf Formen wirkt σ durch das Pullback.

3 Symplektische Wirkungen

Definition. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld \mathfrak{X} auf M heißt *symplektisch*, falls seine lokalen Flüsse Symplektomorphismen sind. Die Menge der symplektischen Vektorfelder wird mit $\text{Symp}(M, \omega)$ bezeichnet. Außerdem sprechen wir bei einer Wirkung $\sigma : G \times M \rightarrow M$ von einer *symplektischen Wirkung*, wenn σ_g für alle $g \in G$ ein Symplektomorphismus ist, d.h. $\sigma_g^*\omega = \omega$ für alle $g \in G$.

Des Weiteren definiert jedes $f \in C^\infty(M)$ ein Vektorfeld \mathfrak{X}_f durch

$$\omega(\mathfrak{X}_f, \cdot) = df(\cdot).$$

\mathfrak{X}_f ist dann das *Hamiltonsche Vektorfeld* zur *Hamiltonfunktion* f . Die Menge der Hamiltonschen Vektorfelder wird mit $\text{Ham}(M, \omega)$ bezeichnet.

Proposition. Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine glatte Wirkung. Dann gilt:

$$\sigma \text{ ist symplektisch} \iff L\sigma(\xi) \in \text{Symp}(M, \omega), \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}.$$

Die Relation $\text{Ham}(M, \omega) \subseteq \text{Symp}(M, \omega)$ liefert uns die Abbildung $j : C^\infty(M) \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$, $H \mapsto \mathfrak{X}_H$. Das folgende Theorem gibt nun eine Möglichkeit an, wie Bewegungskonstanten konstruiert werden können, d.h. Größen, die entlang der Integralkurven von \mathfrak{X}_H invariant sind.

Theorem (Noether). Sei G eine Lie-Gruppe und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine symplektische Wirkung. Wenn eine Abbildung $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(M) & \\ & \nearrow \mu & \downarrow j \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{L\sigma} & \text{Symp}(M, \omega) \end{array}$$

kommutiert, und wenn weiterhin die Hamiltonfunktion $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ invariant unter G ist ($H(g \cdot m) = H(m) \quad \forall g \in G, m \in M$), dann sind alle $\mu(\xi), \xi \in \mathfrak{g}$, Bewegungskonstanten, d.h. für jede Integralkurve γ von \mathfrak{X}_H ist $\mu(\xi) \circ \gamma$ konstant.

4 Hamiltonsche Wirkungen und die Impulsabbildung

Definition. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe. Eine symplektische Wirkung $\sigma : G \times M \rightarrow M$ heißt *fast Hamiltonsch*,

falls $L\sigma(\xi) \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$, und sie heißt *Hamiltonsch*, falls ein Homomorphismus von Lie-Algebren $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ existiert mit $\mathfrak{X}_{\mu(\xi)} = L\sigma(\xi)$. Die Struktur einer Lie-Algebra auf $C^\infty(M)$ ist dabei durch die *Poisson-Klammer* gegeben $\{f, g\} = \omega(\mathfrak{X}_f, \mathfrak{X}_g)$.

Sei $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine Hamiltonsche Wirkung und $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ der zugehörige Homomorphismus von Lie-Algebren. Die *Impulsabbildung* von (σ, μ) ist dann die Abbildung $P : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definiert durch

$$\langle P(m), \xi \rangle := \mu(\xi)(m).$$

Die Impulsabbildung ist ein Werkzeug, mit dem man in der symplektischen Geometrie Erhaltungsgrößen konstruiert. Sie verallgemeinert die klassischen Begriffe des linearen und des Drehimpulses.

Definition. Sei G eine Lie-Gruppe, $g \in G$ und $\xi \in \mathfrak{g}$. Die Abbildung $\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*)$ definiert durch

$$\langle (\text{Ad}^* g)f, \xi \rangle := \langle f, (\text{Ad } g^{-1})\xi \rangle$$

heißt *koadjungierte Darstellung* von G . Verkürzt schreibt man auch $g \cdot f$ für $(\text{Ad}^* g)f$.

5 Koadjungierte Orbits

Motivation, warum wir uns gerade mit koadjungierten Orbits beschäftigen: Zum ersten tauchen symplektische Mannigfaltigkeiten im Kontext der koadjungierten Wirkung ganz natürlich auf und zum zweiten gibt es eine enge Verknüpfung mit der Darstellungstheorie der Lie-Gruppe G . Genauer gesagt gilt für nilpotente (einfach zusammenhängende) Lie-Gruppen, dass der Raum der Äquivalenzklassen unitärer irreduzibler Darstellungen homöomorph zum Raum der koadjungierten Bahnen ist. Für andere Klassen von Lie-Gruppen gelten abgeschwächte Aussagen. Welche Bedeutung irreduzible Darstellungen eine Lie-Gruppe haben, wurde bereits zu Beginn geschildert.

Auf der Menge lässt sich in natürlicher Weise eine 2-Form konstruieren.

Theorem. Sei \mathcal{O} ein Orbit der koadjungierten Wirkung. Dann ist (\mathcal{O}, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. $\sigma : G \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, $\sigma(g, f) = g \cdot f$ ist eine Hamiltonsche Wirkung bzgl. des Homomorphismus $\mathfrak{g} \ni \xi \xrightarrow{\mu} \mu(\xi) \in C^\infty(\mathcal{O})$ mit $\mu(\xi)(f) = f(\xi)$, für welche die Impulsabbildung durch die Inklusion $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ gegeben ist.

Bemerkung (Kurzbeschreibung der symplektischen Form). Sei $f = g \cdot f_0 \in \mathcal{O}$ ein Element des Orbits von $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ und $X, Y \in T\mathcal{O}$. Für alle $X_f \in T_f\mathcal{O}$ existiert ein $\xi_X \in \mathfrak{g}$ mit

$$X_f = \text{ad}^*(\xi_X).$$

Die symplektische Form hat dann die Gestalt

$$\omega(X, Y)(f) = \omega_f(X_f, Y_f) = -\langle f, [\xi_X, \xi_Y] \rangle = -f([\xi_X, \xi_Y])$$

mit $Y_f = \text{ad}^*(\xi_Y)f$.