Nilpotente Liealgebren

Tobias Barthel

Vortrag 3

In diesem Vortrag führen wir eine erste wichtige Klasse von Liealgebren ein, die durch eine spezielle Endlichkeitsbedingung charakterisiert werden.

Definition 1 Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Falls die *absteigende Zentralreihe* $C^n(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$, induktiv definiert durch

$$C^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g},\ C^{n+1}(\mathfrak{g}) := [C^n(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}],$$

nach endlich vielen Schritten abbricht, so wird $\mathfrak{g}$ *nilpotent* genannt.
Es sei bemerkt, dass offenbar für alle n

$$C^n(\mathfrak{g}) \lhd \mathfrak{g}$$

gilt und somit in der Tat

$$C^n(\mathfrak{g}) \leq C^{n+1}(\mathfrak{g}).$$

Insbesondere ist jede abelsche Liealgebra nilpotent.

Bemerkung 2 Das Beispiel der zweidimensionalen nicht-abelschen Liealgebra zeigt, dass die Klasse der nilpotenten Liealgebren nicht abgeschlossen unter allgemeinen Erweiterungen ist. Die Abgeschlossenheit unter zentralen Erweiterungen ist hingegen leicht einzusehen.

Ziel dieses Vortrages wird nun sein, eine punktweise Charakterisierung nilpotenter Liealgebren zu finden. Diese wird durch den *Satz von Engel* bereitgestellt, den wir zunächst für den Spezialfall linearer Liealgebren formulieren wollen.

Proposition 3 Sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine Liealgebra, deren Elemente $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent sind, d.h. $x^n = 0$ für $n \gg 0$. Dann

$$\exists v \in V \setminus \{0\} : \ \mathfrak{g}(v) = 0$$

Beweisidee: Wir wählen eine beliebige maximale Lieunteralgebra $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ und finden per Induktion über die Dimension von $\mathfrak{g}$ ein x mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + x\mathbb{K}$. Eine weitere Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert dann die Behauptung. □

Korollar 4 Unter den Voraussetzungen der Proposition folgt die Existenz einer vollständigen Fahne $\mathcal{F}$ in V mit

$$\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_n(\mathcal{F}).$$

Ergo lassen sich in diesem Falle alle Elemente von $\mathfrak{g}$ simultan als echt obere Dreiecksmatrizen darstellen. □

Das Korollar liefert mit Hilfe der adjungierten Darstellung

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

schließlich das berühmte

Theorem 5 (Satz von Engel) Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Dann sind äquivalent:
(i) $\mathfrak{g}$ ist nilpotent
(ii) $\forall x \in \mathfrak{g} : \exists n \in \mathbb{N} : ad(x)^n = 0.$ □