Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln, Teil I

Felix Ketelaar und Norman Metzner

Eine Bemerkung vorab: Ich werde im Folgenden für den großen Teil der Behauptungen nur Beweisideen geben, sie jedoch nicht im Detail zeigen. Ein Teil der Beweise bieten sich sehr gut als Übungsaufgabe an, um mit der Maschinerie vertraut zu werden. Die anderen Beweise finden sich, wenn nichts anderes angegeben ist, im Detail in [Rudb]. Das Skript findet ihr im Wiko-Wiki.

1 Zusammenhangsformen und Krümmung

Zu Beginn eine kurze Erinnerung an die fundamentalen Vektorfelder (auch Killingfelder). Sei (P, G, σ) eine G-Mannigfaltigkeit. Es lässt sich leicht zeigen, dass für ein $X \in \mathfrak{g}$

$$\Phi : P \times \mathbb{R} \ni (p, t) \mapsto \sigma_{\exp tX}(p) \in P$$

eine glatte Wirkung von $\mathbb{R}$ auf P ist. Damit definiert Φ eine 1-parametrige Gruppe von Diffeomorphismen und das zugehörige Vektorfeld heißt das von X erzeugte *fundamentale Vektorfeld* und wird mit X_* bezeichnet. Wir können es folgendermaßen darstellen

$$X_*(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{\restriction_{t=0}} \Phi_t(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{\restriction_{t=0}} \sigma_{\exp tX}(p).$$

Für ein Hauptfaserbündel P wird die von den fundamentalen Vektorfeldern X_*, $X \in \mathfrak{g}$, aufgespannte Distribution als *vertikale Distribution* $V : p \mapsto V_p$ bezeichnet. Die Unterräume $V_p \subseteq T_pP$ heißen *vertikale Unterräume.*

Notation: $\sigma : P \times G \to P$ ist die Rechtswirkung. Fixieren wir ein $p \in P$ oder $a \in G$, dann schreiben wir entsprechend $\sigma_p : G \to P$, $g \mapsto \sigma_p(g) = \sigma(p, g)$ und analog $\sigma_a : P \to P$, $p \mapsto \sigma_a(p) = \sigma(p, a)$. Demzufolge sind dann die Tangentialabbildungen Abbildungen zwischen den Tangentialbündeln. Jedoch schreiben wir kurz $\sigma'_p = {\sigma'_p}{\restriction_e} = (\sigma'){\restriction_{(p,e)}} : T_eG = \mathfrak{g} \to T_pP$.
Man kann folgende Eigenschaften der vertikalen Unterräume zeigen.

- V_p fällt mit dem Tangentialraum an die Faser von p und damit auch mit $\ker \pi'_p$ zusammen.

- Die vertikale Distribution ist äquivariant, d.h. $V_{\sigma_a(p)} = \sigma'_a V_p$. Insbesondere gilt für den Transport der fundamentalen Vektorfelder

$$\sigma'_a X_*(p) = (\mathrm{Ad}(a^{-1})X)_*(\sigma_a(p)).$$

- Die Abbildung $P \times \mathfrak{g} \ni (p, X) \mapsto \sigma'_p X \in V$ ist ein Isomorphismus von Vektorbündeln. Insbesondere sind die Abbildungen $\sigma'_p : \mathfrak{g} \to V_p$, $p \in P$, Isomorphismen von Vektorräumen.

Definition 1.1. Sei $P(M, G)$ ein Hauptfaserbündel. Ein *Zusammenhang* in P ist eine differenzierbare Distribution $\Gamma : p \mapsto H_p$ auf P mit den folgenden Eigenschaften:

1. Γ ist komplementär zu V, d.h. für alle $p \in P$ gilt $H_p \oplus V_p = T_pP$.
2. Γ ist äquivariant, d.h. für alle $p \in P$ und $a \in G$ gilt $H_{\sigma_a(p)} = \sigma'_a H_p$.

H_p heißt *horizontaler Unterraum* im Punkt p.

Somit lässt sich jeder Vektor $Y_p \in T_pP$ eindeutig zerlegen

$$Y_p = \mathrm{hor}\, Y_p + \mathrm{ver}\, Y_p,$$

wobei

$$\mathrm{hor} : TP \to \Gamma, \quad \mathrm{ver} : TP \to V$$

die (differenzierbaren) Projektionen auf die horizontale bzw. vertikale Distribution sind.

Wir haben oben gesehen, dass σ'_p die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bijektiv auf V_p abbildet. Das erlaubt uns folgende Definition.

Definition 1.2. Sei $P(M, G)$ ein Hauptfaserbündel und Γ ein Zusammenhang in P. Die 1-Form $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ mit Werten in der Lie-Algebra, definiert durch

$$\theta(Y_p) \coloneqq (\sigma'_p)^{-1}(\mathrm{ver}\, Y_p), \quad p \in P, Y_p \in T_pP,$$

heißt *Zusammenhangsform* von Γ. Mit anderen Worten $\theta(Y_p)$ ist das eindeutig bestimmte Element in $\mathfrak{g}$, deren fundamentales Vektorfeld im Punkt p gleich der vertikalen Komponente von Y_p ist, $(\theta(Y_p))_* = \mathrm{ver}\, Y_p$.

Es gilt dann folgender Satz.

Satz 1.3. *Sei $P(M, G)$ ein Hauptfaserbündel und Γ ein Zusammenhang in P. Dann ist die Zusammenhangsform θ differenzierbar. Außerdem gilt:*

1. $\ker(\theta_p) = H_p$ *für alle* $p \in P$,
2. $\theta(X_*) = X$ *für alle* $X \in \mathfrak{g}$,
3. $\sigma_a^*\theta = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \theta$ *für alle* $a \in G$.

Umgekehrt definiert jedes $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ mit den Eigenschaften 2 und 3 eindeutig einen Zusammenhang Γ.

Beweis. Differenzierbarkeit: Zeige, dass die Abbildung $TP \ni Y_p \mapsto \theta(Y_p) \in \mathfrak{g}$ differenzierbar ist, indem man sie geeignet zerlegt.
Eigenschaften: Übungsaufgabe
Für Definition des Zusammenhangs betrachte $H_p \coloneqq \ker(\theta_p)$ und rechne geforderten Eigenschaften nach.

□

Diese Charakterisierung von Zusammenhangsformen mit Hilfe der Eigenschaften 2 und 3 aus dem letzten Satz impliziert folgende Aussagen.

Satz 1.4.

1. *Jede Konvexkombination von Zusammenhangsformen ist wieder eine Zusammenhangsform.*
2. *Ist $h : P \to P'$ ein Bündelmorphismus und θ' eine Zusammenhangsform auf P', dann ist $h^*\theta'$ eine Zusammenhangsform auf P.*

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt:

Satz 1.5. *In jedem Hauptfaserbündel über einer parakompakten Mannigfaltigkeit existiert ein Zusammenhang.*

Beweis. Nutze System von Trivialisierungen $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ mit zugehöriger Zerlegung der Eins und setze

$$H_{\varphi_i(m,e)} \coloneqq \varphi_i' T_{(m,e)}(U_i \times \{e\}).$$

□

Kommen wir nun zu den Begriffen der kovarianten Ableitung und der Krümmung.

Definition 1.6. Sei $P(M, G)$ ein Hauptfaserbündel, F ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\alpha \in \Omega^k(P, F)$. Die durch den Zusammenhang Γ in P induzierte *kovariante Ableitung* $D\alpha \in \Omega^{k+1}(P, F)$ ist definiert durch

$$(D\alpha)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \mathrm{d}\alpha(\operatorname{hor} X_1, \ldots, \operatorname{hor} X_{k+1}).$$

Definition 1.7. Sei $P(M, G)$ ein Hauptfaserbündel und θ eine Zusammenhangsform auf P. Die 2-Form $F \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$, definiert durch

$$F \coloneqq D\theta,$$

heißt *Krümmungsform* von θ.

Aus der charakterisieren Eigenschaft 3 für die Zusammenhangsform erhalten wir unmittelbar

$$\sigma_a^* F = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ F.$$

Formen mit dieser Eigenschaften heißen vom Typ Ad.

Satz 1.8 (Strukturgleichung)**.** *Sei P ein Hauptfaserbündel, θ eine Zusammenhangsform in P und F ihre Krümmungsform. Dann gilt:*

$$\mathrm{d}\theta(Y, Z) = -\left[\theta(Y), \theta(Z)\right] + F(Y, Z), \quad Y, Z \in T_p P,\ p \in P.$$

Beweis. Zeige Gleichheit in den drei Fällen:

1. Y, Z horizontal
2. $Y = X_*$ vertikal, Z horizontal (zeige: $[Y, Z] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\restriction_{t=0} \sigma'_{\exp -tX} Z(p)$)
3. $Y = (X_1)_*$, $Z = (X_2)_*$ vertikal (nutze: $[X_{1*}, X_{2*}] = [X_1, X_2]_*$ für Rechtswirkung!)

□

Definieren wir das äußere Produkt von Lie-Algebra-wertigen Formen

$$[\alpha, \beta](Y_1, \dots, Y_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \times \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) [\alpha(Y_{\sigma(1)}, \dots, Y_{\sigma(k)}), \beta(Y_{\sigma(k+1)}, \dots, Y_{\sigma(k+l)})],$$

dann lässt sich die Strukturgleichung wie folgt schreiben

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + F.$$

Satz 1.9 (Bianchi-Identität)**.** *Sei P ein Hauptfaserbündel und F die Krümmungsform einer Zusammenhangsform auf P. Dann gilt:*

$$DF = 0.$$

Beweis. Zeige $\mathrm{d}F(Y_1, Y_2, Y_3) = 0$ für beliebige horizontale Vektorfelder Y_i. Nutze die Strukturgleichung und die bekannte Formel für die äußere Ableitung

$$\mathrm{d}\alpha(Y_1, \dots, Y_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} Y_i(\alpha(Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_{k+1})) \\ \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j} \alpha([Y_i, Y_j], Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_{k+1}).$$

□

Man kann zeigen, dass für eine horizontale Lie-Algebra-wertige k-Form vom Typ Ad gilt

$$D\alpha = \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\theta, \alpha] + \frac{1}{2}(-1)^{k+1}[\alpha, \theta].$$

Damit lässt sich die Bianchi-Identität auch in der Gestalt

$$\mathrm{d}F + \frac{1}{2}[\theta, F] - \frac{1}{2}[F, \theta]$$

schreiben.

In der Physik ist man daran interessiert das Eichpotential (= Zusammenhangsform) durch ein Objekt auf der Raumzeit (Basismannigfaltigkeit) zu repräsentieren. Dies ist im Allgemeinen nur lokal möglich. Ist $s : U \to \pi^{-1}(U)$ ein lokaler Schnitt, dann definieren wir das lokale Eichpotential bzw. den lokalen Feldstärketensor durch

$$A := s^*\theta, \quad \tilde{F} := s^*F.$$

Die Strukturgleichung ist dann

$$\tilde{F} = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A].$$

Für ein Karte mit Koordinaten (x_μ) und eine Basis e_a der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ nehmen unsere Formen folgende Gestalt an

$$\begin{aligned} A &= A_\mu \mathrm{d}x^\mu = A^a_\mu \mathrm{d}x^\mu \otimes e_a, \\ \tilde{F} &= \frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \frac{1}{2}\tilde{F}^a_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \otimes e_a. \end{aligned}$$

Dann lautet die Strukturgleichung

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Sind die lokalen Größen gegeben, so lassen sich Zusammenhangsform θ und Krümmungsform F wie folgt rekonstruieren

$$\begin{aligned} \theta_p &= \mathrm{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^*(A))_p + (\kappa^*\Theta)_p, \\ F_p &= \mathrm{Ad}(\kappa(p)^{-1})(\pi^*(\tilde{F}))_p. \end{aligned}$$

Dabei ist

- $\kappa : \pi^{-1}(U) \to G$ die zum Schnitt s assoziierte äquivariante Abbildung definiert durch
$$\sigma_{\kappa(p)}(s \circ \pi(p)) = p, \quad \forall p \in P,$$
- Θ die Maurer-Cartan-Form (Lie-Algebra-wertig), definiert durch
$$\langle \Theta, X \rangle (a) = X_a,$$
wobei X ein linksinvariantes Vektorfeld ist.

Führen wir eine eine aktive lokale Eichtransformation aus, d.h. wir betrachten die Zusammenhangsform $\theta' = \varphi^*\theta$ für einen vertikalen Automorphismus φ, dann gilt für die lokalen Repräsentanten $A' = s^*(\varphi^*\theta)$ und $\tilde{F}' = s^*(\varphi^* F)$ folgendes Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} A'_m &= \mathrm{Ad}(\rho(m)^{-1}) \circ A_m + (\rho^*\Theta)_m, \\ \tilde{F}'_m &= \mathrm{Ad}(\rho(m)^{-1}) \circ \tilde{F}_m. \end{aligned}$$

Dabei ist ρ der lokale Repräsentant des vertikalen Automorphismus in folgendem Sinne: $\rho = s^*u = u \circ s$ mit dem zum vertikalen Automorphismus φ gehörigen $u \in \mathrm{Hom}_G(P, G)$, das definiert ist durch

$$\varphi(p) := \sigma_{u(p)}(p).$$

(Für Beziehung zwischen vertikalen Automorphismen und $\mathrm{Hom}_G(P, G)$ siehe [Rudb] Bemerkung 1.1.8 und Satz 1.1.9.) Im Fall einer linearen Lie-Gruppe G haben die Transformationsformel die Form

$$\begin{aligned} A' &= \rho^{-1} A \rho + \rho^{-1} d\rho, \\ \tilde{F}' &= \rho^{-1} \tilde{F} \rho. \end{aligned}$$

In Physikbüchern wird das Transformationsverhalten des Eichpotentials bzw. der Feldstärke unter Eichtransformationen meist in Gestalt der letzten beiden Gleichungen angegeben.

Zum Abschluss dieses Abschnitts noch ein Einschub über horizontale Lifts. Insbesondere horizontale Lifts von Kurven auf M sind für die späteren Betrachtungen der Holonomiegruppe von Bedeutung ist.

Da die Projektion π einen linearen Isomorphismus von H_p auf $T_{\pi(p)}M$ liefert, existiert für jedes Vektorfeld X auf M ein eindeutig bestimmter horizontaler Lift X^*, d.h. X^* ist ein horizontales Vektorfeld auf P, welches auf X projiziert wird, $\pi'(X^*_p) = X_{\pi(p)}$ für alle $p \in P$. Mit Hilfe von lokalen Trivialisierungen zeigt man, dass X^* glatt ist (siehe auch [KN63] Proposition II.1.2). Man sieht leicht die folgenden Eigenschaften.

Lemma 1.10. *Seien X^*, Y^* die horizontalen Lifts von X, Y. Dann ist*

1. $X^* + Y^* = (X + Y)^*$;
2. $(fX)^* = f^* X^*$ *für jede Funktion f auf M, wobei f^* die Funktion auf P ist, definiert durch* $f^* = \pi \circ f$;
3. $\mathrm{hor}[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$.

Definition 1.11. Seien γ bzw. γ^* differenzierbare Kurven in M bzw. P.

1. γ^* heißt *Lift* von γ, falls $\pi \circ \gamma^* = \gamma$ gilt.

2. γ^* heißt *horizontal im Sinne von* Γ, falls alle Tangentialvektoren $\dot{\gamma}^*$ horizontal im Sinne von Γ sind.

Satz 1.12. *Sei $t \mapsto \gamma(t)$ eine differenzierbare Kurve in M. Für jeden Punkt $p_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ existiert genau ein horizontaler Lift der Kurve γ in die Bündelmannigfaltigkeit, der in p_0 startet.*

Beweis. Wähle zunächst einen beliebigen Lift γ^*, der in p_0 startet, also $\pi(\gamma^*(t)) = \gamma(t)$ für alle t. Suche den horizontalen Lift in der Form

$$\psi(t) = \sigma_{g(t)}\gamma^*(t).$$

Die Bedingung der Horizontalität wird dann zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung für $t \mapsto g(t)$. Aus Existenz- und Eindeutigkeitssätzen folgt die Behauptung. $\square$

Damit erhalten wir eine γ-abhängigen Isomorphismus der Fasern über γ. Außerdem erlaubt es uns

2 Zusammenhänge auf assoziierten Bündeln und Vektorbündeln

Wenden wir uns zuerst den Schnitten des assoziierten Bündels zu. Dazu sei (F, G, τ) eine linke G-Mannigfaltigkeit. Bezeichne $\mathrm{Hom}_G(P, F)$ den Raum der differenzierbaren Abbildungen $\tilde{\Phi} : P \to F$ mit

$$\tilde{\Phi} \circ \sigma_a = \tau_{a^{-1}} \circ \tilde{\Phi}. \tag{1}$$

Dies sind gerade die äquivarianten Abbildung, wenn man F als rechte G-Mannigfaltigkeit auffasst.

Satz 2.1. *Zu jedem $\tilde{\Phi} \in \mathrm{Hom}_G(P, F)$ existiert ein $\Phi \in \Gamma^\infty(P \times_G F)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "(\mathrm{id}_P, \tilde{\Phi})"] \arrow[d, "\pi"'] & P \times F \arrow[d, "\iota"] \\
M \arrow[r, "\Phi"] & P \times_G F
\end{tikzcd}$$

Die Zuordnung $\tilde{\Phi} \mapsto \Phi$ definiert eine Bijektion von $\Gamma^\infty(P \times_G F)$ auf $\mathrm{Hom}_G(P, F)$.

Beweis. Für ein $\tilde{\Phi} \in \mathrm{Hom}_G(P, F)$ definiere

$$\Phi(m) := [(p, \tilde{\Phi}(p))] = \iota_p \tilde{\Phi}(p),$$

wobei $p \in \pi^{-1}(m)$ und ι_p der Diffeomorphismus

$$\iota_p : F \to P \times_G F, \quad \iota_p(f) \coloneqq \iota(p, f) = [(p, f)]$$

ist. (Notation: $\iota : P \times F \to P \times_G F$ Projektion auf Quotienten.) Wohldefiniertheit folgt aus der Äquivarianz (1), Kommutativität ist nach Konstruktion gegeben und die Bijektivität folgt aus der Bijektivität von ι_p. $\square$

Wir erhalten eine spezielle Klasse von assoziierten Bündeln, wenn F ein Vektorraum ist. Diese Klasse von assoziierten Bündeln ist für viele Anwendungen von Bedeutung, zum Beispiel die im letzten Teil des Vortrags diskutierten linearen Zusammenhänge. Im Folgenden sei F ein Vektorraum und wir bezeichnen mit E das Vektorbündel $E \coloneqq P \times_G F$. In diesem Fall ist ι_p linear und damit ist die Bijektion aus dem letzten Satz ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Eine dem letzten Satz entsprechende Aussage gilt ebenfalls für Differentialformen. Um dies formulieren zu können, benötigen wir folgende Definitionen. Bemerke dazu vorab, da E ein Vektorbündel ist, können wir $\Lambda^k(T^*M) \otimes E$ bilden und Schnitte darin betrachten.

Definition 2.2.

1. Ein Schnitt in $\bigwedge^k(T^*M) \otimes E$ heißt *k-Differentialform auf M mit Werten in E*. Den Vektorraum dieser Schnitte bezeichnen wir mit $\Omega^k(M, E)$. NB: Wegen $\bigwedge^0(T^*M) = M \times \mathbb{R}$ und $(M \times \mathbb{R}) \otimes E = E$ können wir $\Omega^0(M, E)$ mit $\Gamma^\infty(E)$ identifizieren.

2. Eine k-Differentialform $\tilde{\alpha}$ auf P mit Werten in F heißt *horizontal vom Typ τ*, falls gilt:

   (a) $\tilde{\alpha}(X_1, \ldots, X_k) = 0$, sobald ein X_i vertikal ist (*Horizontalität*),

   (b) $\sigma_a^* \tilde{\alpha} = \tau_{a^{-1}} \circ \tilde{\alpha}$ (*Typ τ*).

   Wir bezeichnen den Vektorraum der horizontalen k-Formen vom Typ τ mit $\Omega^k_{G,hor}(P, F)$.

Nun kommen wir zu oben angekündigtem Satz.

Satz 2.3. *Zu jeder horizontalen k-Form $\tilde{\alpha} \in \Omega^k_{G,hor}(P, F)$ existiert eine eindeutig bestimmte k-Form $\alpha \in \Omega^k(M, E)$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^k(TP) \arrow[r, "p \times \tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\Lambda^k \pi'"'] & P \times F \arrow[d, "\iota"] \\
\bigwedge^k(TP) \arrow[r, "\alpha"] & E
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei ist p die natürliche Projektion $\bigwedge^k(TP) \to P$. Die Zuordnung $\tilde{\alpha} \mapsto \alpha$ definiert einen Vektorraum-Isomorphismus von $\Omega^k_{G,hor}(P, F)$ auf $\Omega^k(M, E)$.

Beweis. Seien $m \in M$, $p \in \pi^{-1}(m)$ und $X_i \in T_mM$, $Y_i \in T_pP$ mit $\pi'(Y_i) = X_i$. Setze

$$\alpha_m(X_1, \dots, X_k) := \iota_p \circ \tilde{\alpha}_p(Y_1, \dots, Y_k).$$

Zeige, dass dies wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl von p und der Wahl der Y_i. Kommutativität ist nach Konstruktion gegeben und die Bijektivität und Linearität von $\tilde{\alpha} \mapsto \alpha$ folgen aus der Bijektivität und Linearität von ι_p. □

Mit Hilfe des nächsten Satzes können wir die obige Korrespondenz anwenden, um die kovariante Ableitung für Differentialformen auf M mit Werten in E zu definieren.

Satz 2.4. *Für jedes $\tilde{\alpha} \in \Omega^k_{G,hor}(P,F)$ ist die kovariante Ableitung $D\tilde{\alpha}$ eine horizontale $(k+1)$-Form vom Typ τ.*

Beweis. Horizontalität ist nach Definition der kovarianten Ableitung gegeben und dass $D\tilde{\alpha}$ vom Typ τ ist, rechnet man direkt nach unter Ausnutzen eben dieser Eigenschaft für $\tilde{\alpha}$. □

Damit ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.5. Die *kovariante Ableitung* von $\alpha \in \Omega^k(M,E)$ wird mit $\nabla\alpha$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\widetilde{(\nabla\alpha)} := D\tilde{\alpha}.$$

Nach Definition gilt also

$$(\nabla\alpha)_m(X_1, \dots X_{k+1}) = \iota_p \circ (D\tilde{\alpha})_p(Y_1, \dots, Y_{k+1})$$

mit den Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 2.3. Insbesondere haben wir für Schnitte $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$

$$(\nabla\Phi)_m(X) = \iota_p \circ (D\tilde{\Phi})_p(Y).$$

Damit induziert die kovariante Ableitung eine Abbildung

$$TM \times \Gamma^\infty(E) \to E, \quad (X, \Phi) \mapsto \nabla_X\Phi := \nabla\Phi(X).$$

Sei $X_m \in T_mM$ und X_p^* der horizontale Lift in den Punkt $p \in \pi^{-1}(m)$. (NB: Wir zeigen unten, dass durch den Zusammenfang auf P in natürlicher Weise ein Zusammenhang auf dem assoziierten Bündel induziert wird.) Dann lassen sich obige Formeln wie folgt schreiben

$$\nabla_{X_m}\Phi = \nabla\Phi(X_m) = \iota_p(D\tilde{\Phi}(X_p^*)) = \iota_p(\mathrm{d}\tilde{\Phi}(X_p^*)) = \iota_p(X_p^*(\tilde{\Phi}))$$

bzw.

$$\widetilde{(\nabla_X\Phi)} = X^*(\Phi) = \mathcal{L}_{X^*}(\tilde{\Phi}),$$

wobei $\mathcal{L}$ die Lie-Ableitung ist.

Aus diesen Gleichungen und den Eigenschaften des horizontalen Lifts folgt unmittelbar.

Satz 2.6. *Für $X, X_1, X_2 \in \mathcal{V}(M)$, $\Phi, \Phi_1, \Phi_2 \in \Gamma^\infty(E)$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt*

1. $\nabla_{X_1+X_2}\Phi = \nabla_{X_1}\Phi + \nabla_{X_2}\Phi$,
2. $\nabla_X(\Phi_1 + \Phi_2) = \nabla_X\Phi_1 + \nabla_X\Phi_2$,
3. $\nabla_{fX}\Phi = f\nabla_X\Phi$,
4. $\nabla_X(f\Phi) = X(f)\Phi + f\nabla_X\Phi$.

Abschließend skizzieren wir, wie der Zusammenhang auf P in natürlicher Weise einen Begriff der Parallelität bzw. Horizontalität auf $E = P \times_G F$ induziert.
Mit der Bezeichnung

$$\iota_f : P \to E, \quad \iota_f(p) = [(p, f)]$$

definieren wir die durch Γ (Zusammenhang auf P) induzierten horizontalen Unterräume auf E als

$$H_{[(p,f)]} \coloneqq \iota'_f(H_p).$$

Man kann zeigen, dass die rechte Seite unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist. Für $e = [(p, f)] \in E$ gilt weiterhin

$$T_eE = V_e \oplus H_e,$$

wobei V_e den Tangentialraum an die Faser bezeichnet. Außerdem folgt aus der Glattheit von $p \mapsto H_p$ die Glattheit von $e \mapsto H_e$. Bezeichne ρ die zum Bündel E gehörige Projektion auf den Basisraum M. Es folgt, dass ρ' durch Einschränkung einen Vektorraum-Isomorphismus von H_e auf T_mM induziert. Für die horizontalen Lifts rechnet man dann die Relation

$$X^*_{[(p,f)]} = \iota'_f X^*_p$$

nach.

Sei γ eine Kurve in M, $[(p, f)]$ ein Element der Faser über $\gamma(0)$ in E, also insbesondere $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, d.h. p ist bzgl. P in der Faser über $\gamma(0)$. Die Kurve γ^*_p bezeichne den horizontalen Lift von γ in P. Der horizontale Lift von γ in E durch den Punkt $[(p, t)]$ ist dann entsprechend der Definition gegeben durch

$$\gamma^*_{[(p,f)]}(t) = \iota_f(\gamma^*_p(t)) = [(\gamma^*_p(t), f)].$$

Definition 2.7. Ein Schnitt $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$ heißt *parallel bezüglich eines Zusammenhangs* Γ, falls $\mathrm{im}(\Phi'_m) \subseteq H_{\Phi(m)}$ für alle $m \in M$ gilt.

Satz 2.8. *Sei $X \in TM$, $\Phi \in \Gamma^\infty(E)$ und $m \in M$. Dann gilt*

$$\nabla_{X_m}\Phi = \Phi' X_m - X^*_{\Phi(m)}.$$

Daraus folgt, ein Schnitt Φ ist genau dann parallel, wenn $\nabla_X\Phi = 0$ für alle $X \in TM$ gilt.

Beweis. Den ersten Teil der Aussage zeigt man durch direktes Nachrechnen mit Hilfe der obigen Definition des Zusammenhangs und einer Kurve γ, deren Tangentialvektor $X_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\restriction_{t=0}\gamma(t)$ ist. Der zweite Teil der Aussage folgt dann aus dem ersten und der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts. $\square$

Literatur

[KN63] S. Kobayashi und K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*, Band 1. John Wiley & Sons, 1963.

[Ruda] G. Rudolph: *Vorlesungen zur Mathematischen Physik Teil I: Mannigfaltigkeiten, Tensorfelder und Hamiltonsche Systeme.*

[Rudb] G. Rudolph: *Vorlesungen zur Mathematischen Physik Teil II: Faserbündel, Zusammenhänge und Eichtheorie.*