

Die Rolle von Lie-Gruppen in der Elementarteilchenphysik

- ♣ Klassische Mechanik (Galilei-Invarianz, **LG**) →
 - Spezielle Relativitätstheorie (Poincare-Invarianz, **LG**)
 - Quantenmechanik

Klassifikation von (Elementar-)Teilchen in irreduzible Darstellungen der **LG** nach Masse und Spin

- ♣ Quarks als Elementarteilchen aus der Flavoursymmetrie ($SU(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$, **LG**)

Klassifikation der Quarks und der zusammengesetzten Hadronen in irreduzible Darstellungen der **LG**

- ♣ Standard-Modell der Elementarteilchen

Lokale $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Eichinvarianz (**LG, Faserbündel**) als Ursache der starken, schwachen und elektromagnetischen Kräfte zwischen den Elementarteilchen Quarks und Leptonen und ihre Klassifikation in irreduzible Darstellungen der **LG**

- ♣ Physik jenseits des Standardmodells mit **LG**

- Zusätzliche Eichgruppen und entsprechende Eichkräfte?
- Substruktur von Quarks und Leptonen
- große Unifizierung der Eichkräfte, z.B. $SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$?
- Supersymmetrie (**graduierte Lie-Algebra**) aus Erweiterung der Speziellen Relativitätstheorie

1. Lie-Gruppen in der Speziellen Relativitätstheorie

Klassische Mechanik

Spezielle Relativitätstheorie

1. Relativitätsprinzip: Die Naturgesetze sind forminvariant (kovariant) unter den folgenden Transformationen eines Bezugssystems I (Inertialsystem) in ein Bezugssystem I' (Inertialsystem),

- räumliche Translationen $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$ und zeitliche Translationen $t' = t + a^0$
- räumliche Drehungen
- gleichförmig geradlinige Bewegung von I' relativ zu I .

2. Die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich c

Aussage **äquivalent zu 1. und 2.:** Die Naturgesetze sind forminvariant (kovariant) unter den Transformationen, die das Quadrat des Linienelements ds im vierdimensionalen pseudo-euklidischen Minkowskiraum invariant lassen

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad \text{mit } x^0 = c \cdot t$$

Die Transformationen bilden eine **Lie-Gruppe**

$$x' = \Lambda x + a \quad \text{mit } 4 \times 4\text{-Matrix } \Lambda \text{ und } \Lambda^T g \Lambda = g$$

$$\text{mit dem metrischen Tensor } g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Gruppe der Galileitransformationen: Poincaregruppe
im Grenzwert $c \rightarrow \infty$

$a = 0$: **Lorentzgruppe** $O(3, 1)$

$a \neq 0$: **Poincaregruppe**

Die Poincaregruppe ist 10-dimensional (Konvention $c = 1$)

- 6 Erzeuger $M_{\mu\nu}$ der $O(3, 1)$ -Transformationen mit $M_{\nu\mu} = -M_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$)
- 4 Erzeuger P_μ der Raum-Zeittranslationen ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

mit der **Lie-Algebra**

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho} P_\mu - g_{\mu\rho} P_\nu)$$

2 Casimiroperatoren (kommutieren mit allen P_μ 's und $M_{\mu\nu}$'s)

- $M^2 := P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 = \mathbf{P}_0^2 - \vec{\mathbf{P}}^2$, M = Massenoperator (P_0 =Energieoperator, \vec{P} =Impulsoperator)
- Ein Operator, der sich für $P_1, P_2, P_3 = 0$ (im Ruhesystem) mit $M_{23} := J_1$, $M_{31} := J_2$, $M_{12} := J_3$ auf

$$M^2 (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) = M^2 \vec{\mathbf{J}}^2 \quad \text{mit} \quad [J_i, J_j] = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k, \quad \text{der Lie-Algebra der Drehgruppe } O(3),$$

reduziert.

- Physikalische Bedeutung von \vec{J} mit Hilfe der **Quantenmechanik: Drehimpulsvektoroperator** $\vec{L} = \hbar \vec{J}$, (\hbar =Plancksches Wirkungsquantum)

(Elementar-)Teilchen lassen sich klassifizieren nach irreduziblen Darstellungen der Poincaregruppe. Entsprechend sind sie charakterisiert durch

- ihre **Masse** m , den Eigenwert von M , und
- ihren **Spin=Eigendrehimpuls** $\hbar j$ aus dem Eigenwert $\hbar^2 j(j+1)$ von \vec{L}^2 . j kann die Werte $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ annehmen. (entspricht der $2j+1$ -dimensionalen Darstellung der Drehgruppe $O(3)$)

2. Der gruppentheoretische Weg zu Quarks

Heutiger Kenntnisstand

- Es gibt sechs verschiedene Typen, die sog. **Flavours**, von Quarks:

u (up), **d** (down), **s** (strange), **c** (charm), **b** (bottom) und **t** (top),

geordnet nach aufsteigender Masse.

- Alle ca 200 bekannten sog. Hadronen, unter ihnen als prominenteste das Proton und das Neutron, sind als gebundene Zustände von Quarks identifiziert
 - Baryonen = "q q q" mit halbzahligen Spins,
 - Mesonen = "q q̄" mit ganzzahligen Spins
- Die Theorie der starken Wechselwirkung von Quarks hätte (in Abwesenheit der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen) für masselose Quarks eine exakte Flavoursymmetrie; für zunehmende Quarkmasse ist die Symmetrie mehr und mehr gestört.
- Eine recht gute approximative Flavoursymmetrie für die ersten drei Quarkflavours **u** (up), **d** (down), **s** (strange): approximative **Invarianz unter den Transformationen der Liegruppe $SU(3)_f$**

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}.$$

wobei U eine unitäre 3×3 -Matrix ist, d.h. $U U^\dagger = U^\dagger U = \underline{1}$, mit $\det U = 1$.

Startpunkt Die Quarks u,d,s haben (Konvention $\hbar = 1$)

- Spin $\frac{1}{2}$, d.h. sind in der zweidimensionalen **Fundamentaldarstellung $\underline{2}$ der Spin- $O(3)$** , und
- bilden die dreidimensionale **Fundamentaldarstellung $\underline{3}$ der Flavour- $SU(3)_f$**
 - wie angemessen für Elementarteilchen!

Gruppentheoretische Erwartungen für

- die **Grundzustandsbaryonen als “q q q”-gebundene Zustände**
 - entsprechend $\underline{2} \otimes \underline{2} \otimes \underline{2} = (\underline{3} \oplus \underline{1}) \otimes \underline{2} = \underline{3} \otimes \underline{2} \oplus \underline{1} \otimes \underline{2} = \underline{4}_{total\ S} \oplus \underline{2}_S \oplus \underline{2}_A$
haben **Spins $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}$**
 - entsprechend $\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} = (\underline{6} \oplus \bar{\underline{3}}) \otimes \underline{3} = \underline{6} \otimes \underline{3} \oplus \bar{\underline{3}} \otimes \underline{3} = \underline{10}_{total\ S} \oplus \underline{8}_S \oplus \underline{8}_A \oplus \underline{1}_{total\ A}$
treten als **Flavour-Dekuplett, zwei -Oktetts und -Singulett** auf.
- die **Grundzustandsmesonen als “q \bar{q} ”-gebundene Zustände**
 - entsprechend $\underline{2} \otimes \underline{2} = \underline{3} \oplus \underline{1}$
haben **Spins 0 und 1**
 - entsprechend $\underline{3} \otimes \bar{\underline{3}} = \underline{8} \oplus \underline{1}$
treten als **Flavour-Oktett und -Singulett** auf.

Experimenteller Befund

- die **Grundzustandsbaryonen als “q q q”-gebundene Zustände**. Es treten nur die zwei Spin-Flavour-Kombinationen auf, die **total symmetrisch** unter dem Austausch der drei Quarks sind

– ein Spin $\frac{3}{2}$ Flavour-Dekuplett, $(\underline{4}, \underline{10})$.

Zum Zeitpunkt der ersten Untersuchung fehlte noch die experimentelle Bestätigung des Baryons $\Omega^- = “s s s”$; theoretische Voraussage!

– ein Spin $\frac{1}{2}$ Flavour-Oktett, $\frac{1}{\sqrt{2}} ((\underline{2}_S, \underline{8}_S) \oplus (\underline{2}_A, \underline{8}_A))$

Unter ihnen das Proton = “u u d” und das Neutron = “u d d”.

- die **Grundzustandsmesonen als “q \bar{q} ”-gebundene Zustände** wie erwartet

Lösung

- Die sog. Fermistatistik schreibt für einen Vielteilchenzustand, hier “q q q”, von identischen Teilchen mit halbzahligem Spin (sog. Fermionen) **totale Antisymmetrie unter dem Austausch der Teilchen** vor.

- Der Konflikt löst sich, wenn jeder Quarkflavour in drei Varianten vorkommt, (u_1, u_2, u_3) , (d_1, d_2, d_3) , (s_1, s_2, s_3) , die jeweils eine **dreidimensionale Fundamentaldarstellung unter einer neuen sog. Farb-Lie-Gruppe $SU(3)_c$** bilden; da die Baryonen diesen neuen Farbfreiheitsgrad **nicht** aufweisen, müssen sie sich alle in der trivialen Singulett-Darstellung $\underline{1}$ bezüglich der $SU(3)_c$ befinden. Diese ist **total antisymmetrisch!**

- Quarks als elementare Konstituenten der Hadronen sind bestätigt unter Ausnutzung der Invarianz unter den Transformationen der Flavour-Lie-Gruppe $SU(3)_f$ und ihrer Darstellungstheorie.
- Die in der Natur vorkommenden Baryonen als Dreiquark-Zustände genügen der Fermi-Statistik.
- Voraussage einer neuen Lie-Symmetriegruppe $SU(3)_c$ auf dem Niveau der Quarks!

3. Das Standardmodell: Lie-Gruppen als Ursache der Kräfte

Materie-Elementarteilchen des Standardmodells, Spin 1/2 in drei Generationen

elektrische Ladung Q

Leptonen	$\begin{pmatrix} l^{(1)} \\ l^{(2)} \end{pmatrix}_{Y_l}$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
Quarks	$\begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ q_i^{(2)} \end{pmatrix}_{Y_q}$	$\begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_i \\ s_i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_i \\ b_i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Der Index $i = 1, 2, 3$ zählt die Farbfreiheitsgrade (z.B. rot, grün, blau).

(Komplikationen aufgrund der sog. Paritätsverletzung in den schwachen Wechselwirkungen und der spontanen Symmetriebrechung der elektroschwachen Wechselwirkungen werden im Folgenden ignoriert.)

Ausgangspunkt Kräftefreie Quarks und Leptonen

- Jedem Teilchen wird ein Feld zugeordnet, $\begin{pmatrix} l^{(1)}(\mathbf{x}) \\ l^{(2)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}_{Y_l}$, $\begin{pmatrix} q_i^{(1)}(\mathbf{x}) \\ q_i^{(2)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}_{Y_q}$ mit $x := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$

- Die Feldgleichungen für kräftefreie Spin 1/2-Teilchen sind bekannt. Es sind homogene partielle Differentialgleichungen, die die Felder $l(x)$ bzw. $q(x)$ sowie partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^\mu} l(x)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial x^\mu} q(x)$ enthalten (für $\mu = 0, 1, 2, 3$).
- Die Feldgleichungen weisen u.a. **Invarianz auf unter den Transformationen des direkten Produktes der drei Lie-Gruppen**

$$SU(3)_c \times SU(2)_f \times U(1)_Y$$

$$l^{(a)} \rightarrow \sum_{b=1}^2 e^{i \sum_{A=1}^3 \beta_A (T_A^{SU(2)})_{ab}} e^{i \gamma Y_l} l^{(b)}$$

$$q_i^{(a)} \rightarrow \sum_{j=1}^3 e^{i \sum_{I=1}^8 \alpha_I (T_I^{SU(3)})_{ij}} \sum_{b=1}^2 e^{i \sum_{A=1}^3 \beta_A (T_A^{SU(2)})_{ab}} e^{i \gamma Y_q} q_j^{(b)}$$

$(T_I^{SU(3)})_{ij}$ = ij -te Komponente des I -ten Erzeugers der $SU(3)_c$

$(T_A^{SU(2)})_{ab}$ = ab -te Komponente des A -ten Erzeugers der $SU(2)_f$

$\alpha_I, \beta_A, \gamma$ kontinuierliche Gruppenparameter der $SU(3)_c$ bzw. $SU(2)_f$ bzw. $U(1)_Y$.

Klassifikation der Materieteilchen in die **Fundamentaldarstellung** oder die triviale Darstellung

Leptonen $(\underline{1}, \underline{2})_{Y_l}$

Quarks $(\underline{3}, \underline{2})_{Y_q}$

Forderung der lokalen Symmetrie, d.h. Übergang zum Faserbündel

- Die Parameter α_I , β_A , γ können durch **Konvention** gewählt werden, die Konvention muss **für alle Zeiten und alle Orte identisch** sein.
- Man folgt dem Erfolgsrezept Einsteins, das von der Speziellen zur Allgemeinen Relativitätstheorie führte.

EICHPRINZIP

Forderung der Invarianz unter **lokalen** $SU(3)_c \times SU(2)_f \times U(1)_Y$ -Transformationen, deren Gruppenparameter durch **beliebige Funktionen** von x ersetzt sind

$$\alpha_I \rightarrow \alpha_I(x), \quad \beta_A \rightarrow \beta_A(x), \quad \gamma \rightarrow \gamma(x)$$

- Die **Parameterkonventionen** können zu **jeder** Zeit und an **jedem** Ort beliebig getroffen werden – **ohne Effekt auf Messgrößen**

- Die Forderung der lokalen Symmetrie lässt sich für die **freien** Materieteilchen **nicht** erfüllen, da z.B. für die $U(1)_Y$ -Gruppe

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(e^{i\gamma(x)Y} l(x) \right) = e^{i\gamma(x)Y} \frac{\partial}{\partial x^\mu} l(x) + \underbrace{iY e^{i\gamma(x)Y} l(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \gamma(x)}_{\text{Zusatzterm}} \quad \text{für } \mu = 0, 1, 2, 3$$

- Will man die Forderung der Invarianz unter lokalen $SU(n)$ -Eichtransformationen

$$\psi(x) \rightarrow U(x) \psi(x), \quad \text{mit } U(x) = e^{i \sum_{A=1}^{n^2-1} \alpha_A(x) T_A(x)}$$

für einen Satz von Feldern in der n -dimensionalen Fundamentaldarstellung $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$ implementieren,

- müssen **$4 \cdot (n^2 - 1)$ zusätzliche Felder $G_{A\mu}(x)$** eingeführt werden durch die **Ersetzung** der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ durch die **kovarianten Ableitungen \mathcal{D}_μ** in den Feldgleichungen für $\psi(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \underbrace{\mathcal{D}_\mu}_{n \times n\text{-Matrix}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot \underline{1} + i g \underbrace{\sum_{A=1}^{n^2-1} T_A G_{A\mu}(x)}_{\mathcal{G}_\mu(x), n \times n\text{-Matrizen}}$$

Die **Konstante g** ist unbestimmt und ein Mass für die Wechselwirkungsstärke

Wechselwirkungsterm zwischen Eichfeldern $G_{A\mu}(x)$ und den Materiefeldern $\psi(x)$

- Feldgleichungen der Materiefelder $\psi(x)$ invariant unter den **simultanen lokalen Eichtransformationen**

$$\psi(x) \rightarrow U(x) \psi(x)$$

$$\mathcal{G}_\mu(x) \rightarrow U(x) \mathcal{G}_\mu(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g} U(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} U^\dagger(x)$$

- **Feldgleichungen der neuen Eichfelder $G_{A\mu}(x)$ müssen invariant unter denselben lokalen Eichtransformationen sein**; erfordert die **Ersetzung**

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} G_{A\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} G_{A\mu}(x) \rightarrow \frac{1}{ig} [\mathcal{D}_\mu(x), \mathcal{D}_\nu(x)] = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathcal{G}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathcal{G}_\mu(x)$$

$$+ ig \underbrace{[\mathcal{G}_\mu(x), \mathcal{G}_\nu(x)]}$$

$$\sum_{A=1}^{n^2-1} \sum_{B=1}^{n^2-1} G_{A\mu}(x) G_{B\nu}(x) \underbrace{[T_A, T_B]}$$

Wechselwirkung der Eichfelder miteinander

$$\sum_{C=1}^{n^2-1} C_{ABC} T_C$$

mit den **Strukturkonstanten**
 C_{ABC} der Lie-Algebra

Folge der Forderung lokaler $SU(3)_c \times SU(2)_f \times U(1)_Y$ -Eichinvarianz

- Neue Eichfelder und ihre zugehörigen Spin 1-Eichbosonen
 - **8 Gluonfelder bzw. Gluonen** der $SU(3)_c$, die die **starken Kräfte** zwischen den Quarks vermitteln
 - **3 schwache Eichfelder bzw. Eichbosonen** und das **elektromagnetische Feld bzw. Photon** der $SU(2)_f \times U(1)_Y$, die die **schwachen und elektromagnetischen Kräfte** zwischen den Quarks und Leptonen vermitteln
 - **Selbstwechselwirkungen** der Eichbosonen der nichtabelsche Eichgruppen $SU(3)_c \times SU(2)_f$
- Die **Wechselwirkungen** sind – bis auf jeweils eine unbekannte Konstante (g_c, g_2, g_1) – **vollständig festgelegt** durch die Symmetrieforderung einer lokalen Eichinvarianz
- **Übereinstimmung** mit einer Fülle von **experimentellen Daten!**

4. Lie-Gruppen/-Algebren i. d. Physik jenseits des Standardmodells

Zusätzliche lokale Eichgruppen und entsprechende Eichkräfte? z.B.

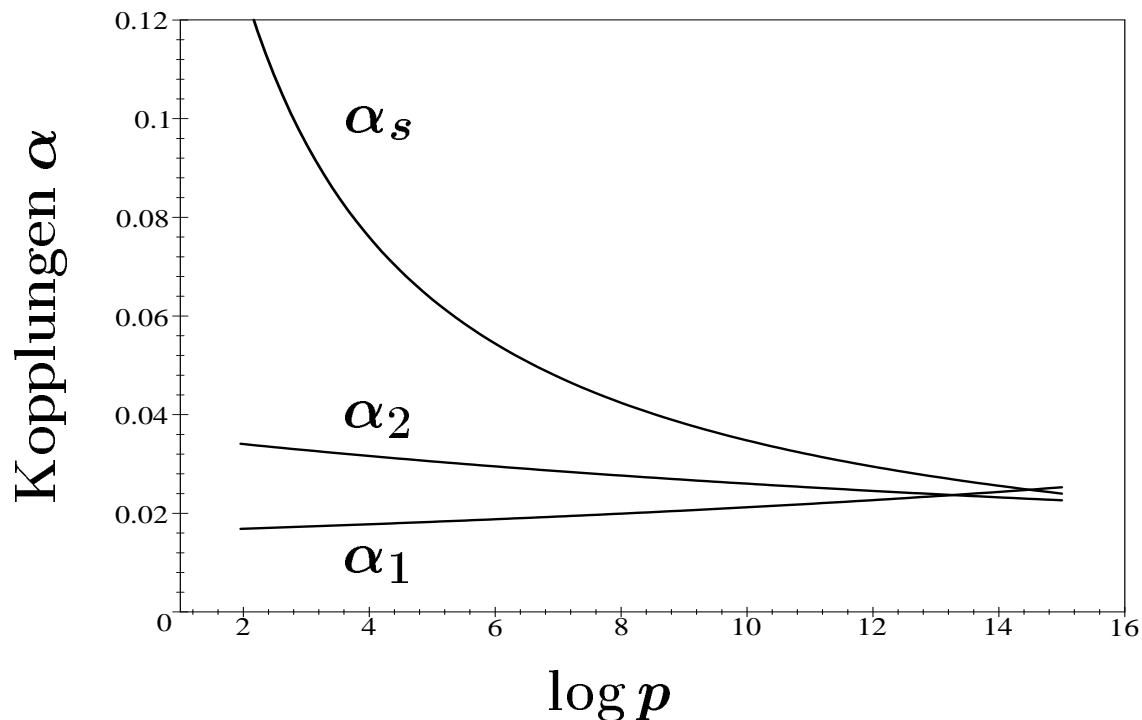
- $SU(3)_c \times SU(2)_f \times U(1)_Y \times U(1)$
- $SU(3)_c \times SU(2)_f \times SU(2) \times U(1)$

Substruktur von Quarks und Leptonen?

- Warum verschiedene Spezies Quarks und Leptonen?
- Warum drei Generationen?
- Mögliche Antwort: Alle Quarks und Leptonen sind aus gemeinsamen Konstituenten aufgebaut entsprechend einer lokalen Eichtheorie auf dem Konstituentenniveau.

Große Unifizierung der Eichkräfte

- Quantisierung der lokalen $SU(3)_c \times SU(2)_f \times U(1)_Y$ -Eichtheorie \rightarrow **gleitende Kopplungen** als Funktionen des Impulses p ; bestimmt durch **Gruppen und Darstellungen** der Quark, Leptonen und Eichbosonen bzgl. der Gruppen.



Unifizierung der Eichkopplungen unter der Voraussetzung, dass **keine neue Physik** bis $p \approx 10^{15}$ GeV auftritt.

Hinweis auf

Unifizierung der drei Eichkräfte in eine einzige fundamentelle Eichkraft mit einer einzigen unbestimmten Kopplung?

- lokale unifizierende Eichgruppe $SU(5) \supset SU(3)_c \times SU(2)_f \times U(1)_Y$ mit Quarks und Leptonen gemischt in den Darstellungen $\underline{\bar{5}}$ und $\underline{10}$
- lokale unifizierende Eichgruppe $SO(10) \supset SU(3)_c \times SU(2)_f \times U(1)_Y$ mit Quarks und Leptonen in der Darstellung $\underline{16}$
- Voraussage des Protonzerfalls, z.B. $p \rightarrow e^+ \pi^0$
 vorausgesagte Lebensdauer $\tau_p \approx 10^{31}$ Jahre
 Experiment für $p \rightarrow e^+ \pi^0$: $\tau_p \approx 1.6 \cdot 10^{33}$ Jahre; Problem! (siehe später)

Supersymmetrie → graduierte Lie-Algebra

- Minimale **Erweiterung der Raum-Zeitalgebra** der Poincare-Gruppe durch zwei Erzeugerpaare, den Operator Q_α und seinen hermitesch konjugierten Operator \bar{Q}_β , mit $\alpha, \beta = 1, 2$ (auf $2N$ Erzeugerpaare erweiterbar)

$$(M_{32}, M_{13}, M_{21}) \rightarrow (M_1, M_2, M_3)$$

$$(M_{01}, M_{02}, M_{03}) \rightarrow (N_1, N_2, N_3)$$

$$J_l = \frac{1}{2} i (M_l + iN_l)$$

$$K_l = \frac{1}{2} i (M_l - iN_l)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho} P_\mu - g_{\mu\rho} P_\nu)$$

$$[J_k, J_l] = i \sum_{m=1}^3 \epsilon_{klm} J_m; \quad j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$

$$[K_k, K_l] = i \sum_{m=1}^3 \epsilon_{klm} K_m; \quad j' = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$

$$[J_k, K_l] = 0.$$

Die irreduziblen Darstellungen der Lorentzgruppe sind durch ein Paar (j, j') gekennzeichnet. Q_α transformiert sich wie $(\frac{1}{2}, 0)$, \bar{Q}_β transformiert sich wie $(0, \frac{1}{2})$.

- **Supersymmetrie-Algebra** = graduierte Lie-Algebra

$$\begin{aligned}
 [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
 [Q_\alpha, P_\mu] &= 0, \quad [\bar{Q}_{\dot{\beta}}, P_\mu] = 0 \\
 \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 && \text{Antikommutator} \\
 \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu && \text{Antikommutator,}
 \end{aligned}$$

wobei die $\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu$ die Komponenten der Paulimatrizen sind

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

- Die Erzeuger $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}$ tragen Spin 1/2 und genügen deshalb Antikommutatorrelationen.

Sie bewirken, dass Teilchen immer in sog. **supersymmetrischen Paaren (Fermion, Boson) mit Spinunterschied 1/2** auftreten.

Einfluss der Supersymmetrie auf die grosse Unifizierung der Eichkopplungen

