

WURZELZERLEGUNG HALBEINFACHER LIE-ALGEBREN II ABSTRAKTE WURZELSYSTEME

NORMAN METZNER, PETER HERBRICH

Im Folgenden wird die Notation aus dem ersten Teil dieser Vortragsbeschreibung weitergeführt (siehe Wurzelzerlegung halbeinfacher Lie-Algebren). Wie zuvor sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra mit aufspaltender Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} . Es bezeichne Δ die Menge der Wurzeln. Wie schon angedeutet spielt der reelle Vektorraum

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \check{\alpha} = \frac{2h'_{\alpha}}{(h'_{\alpha}, h'_{\alpha})} \mid \alpha \in \Delta \right\}$$

eine besondere Rolle in der Klassifikation halbeinfacher Lie-Algebren. Da die Killingform κ auf diesem Unterraum von \mathfrak{h} positiv definit ist, kann man $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ als euklidischen Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}} := \kappa(\cdot, \cdot)$ auffassen. Auf diese Weise wird das Klassifikationsproblem halbeinfacher Lie-Algebren auf reelle Geometrie zurückgeführt. Jeder Vektor $\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ legt eine Spiegelung σ_{α} fest, so dass

$$\sigma_{|\mathbb{R}\alpha} = -\text{id} \quad \text{und} \quad \sigma_{|\alpha^{\perp}} = \text{id},$$

wobei $\alpha^{\perp} = \{\beta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid (\beta, \alpha)_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}} = 0\}$. Über die Zuordnung $\alpha \mapsto h'_{\alpha}$ werden die Wurzeln in den euklidischen Vektorraum $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ eingebettet. In Bezug auf diese Identifikation erfüllen sie die folgenden drei Axiome

- (1) $\forall \alpha \in \Delta : \Delta \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$
- (2) $\forall \alpha \in \Delta : \sigma_{\alpha}(\Delta) \subset \Delta$
- (3) $\alpha \in \Delta$ mit Kowurzel $\check{\alpha} := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$, dann $\forall \beta \in \Delta : (\beta, \check{\alpha}) \in \mathbb{Z}$.

Insbesondere die letzte Eigenschaft schränkt die Möglichkeiten für die Lage der Wurzeln in $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ stark ein.

Man abstrahiert nun vom konkreten Raum $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Sei dazu E ein beliebiger euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Man nennt eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq E \setminus \{0\}$ mit den obigen drei Eigenschaften ein **reduziertes (abstraktes) Wurzelsystem**. Die von den Spiegelungen $\{\sigma_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta\}$ erzeugte Gruppe von Isometrien wird als **Weylgruppe von Δ** bezeichnet. Wie in der euklidischen Geometrie üblich, führt man den Winkel ϑ zwischen den Wurzeln α und β über die folgende Forderung ein

$$\cos \vartheta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}.$$

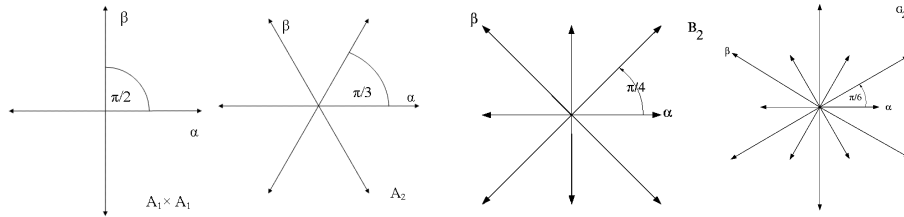
Aus dem dritten Wurzelaxiom folgt $(\alpha, \check{\beta}) (\beta, \check{\alpha}) = 4\cos^2 \vartheta \in \mathbb{Z}$, so dass der Winkel zwischen zwei Wurzeln nur endlich viele Werte annehmen kann.

Die folgende Tabelle enthält eine Auflistung aller Möglichkeiten für linear unabhängige Wurzeln α und β mit $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$.

$(\alpha, \check{\beta})$	$(\beta, \check{\alpha})$	ϑ	$\left(\frac{\ \beta\ }{\ \alpha\ }\right)^2$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	bel.
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

TABELLE 1. Mögliche Winkel für $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$

Die folgende Abbildung enthält alle Isomophietypen zweidimensionaler Wurzelsysteme.



Viele algebraische Aussagen lassen sich geometrisch deuten, wie etwa: Sind α und β linear unabhängige Wurzeln, die einen spitzen Winkel einschließen, dann ist auch ihre Differenz eine Wurzel.

Man nennt eine Teilmenge Π der Wurzeln Δ eine **Basis von Δ** , falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Π ist eine Basis von E .
- (2) Ist $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_{\alpha} \alpha$ eine Wurzel, dann sind alle nicht verschwindenden Koeffizienten k_{α} ganzzahlig und haben das gleiche Vorzeichen.

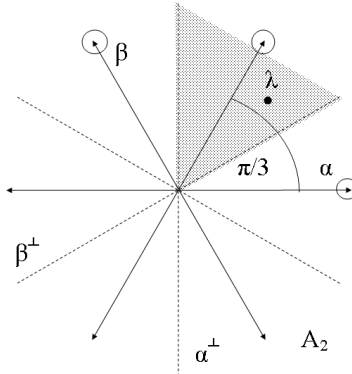
Wurzeln einer Basis schließen stets stumpfe oder aber rechte Winkel ein. Beispielsweise bilden die in der obigen Abbildung eingezeichneten Wurzeln α und β jeweils eine Basis des betreffenden Wurzelsystems.

Die endlich vielen Hyperebenen $\{\alpha^{\perp} | \alpha \in \Delta\}$ zerlegen den Vektorraum E in konvexe, zusammenhängende Teilmengen, die sogenannten **Weylkammern**. Elemente im Inneren der Weylkammern werden regulär genannt, d.h. $\lambda \in E$ ist regulär falls $\lambda \notin \bigcup_{\alpha \in \Delta} \alpha^{\perp}$. Jedes reguläre Element definiert ein zugehöriges **positives System**

$$\Delta^+(\lambda) := \{\alpha \in \Delta | (\lambda, \alpha) > 0\} .$$

Mit anderen Worten, $\Delta^+(\lambda)$ enthält alle diejenigen Wurzeln, die mit λ einen spitzen Winkel einschließen. Solche **positiven Wurzeln** werden überdies **unzerlegbar** genannt, falls sie nicht Summe zweier anderer positiver Wurzeln sind.

Die folgende Abbildung illustriert den Sachverhalt für den Isomorphietyp A_2 . Die Pfeilspitzen entsprechen den 6 Wurzeln des Systems und die gestrichelten Linien sind die genannten Hyperebenen. Der Punkt λ ist regulär und seine Weylkammer ist gepunktet dargestellt. Die Wurzeln des zugehörigen positiven Systems sind umkreist.



Das folgende Theorem beschreibt den Zusammenhang zwischen Basen eines Wurzelsystems und den unzerlegbaren Elementen positiver Systeme.

Theorem. Sei $\lambda \in E$ regulär. Dann ist die Menge der unzerlegbaren Elemente in $\Delta^+(\lambda)$ eine Basis von Δ . Alle Basen sind von dieser Form, d.h. jede Basis ist die Menge der unzerlegbaren Elemente eines gewissen positiven Systems.

Elemente einer Weylkammer haben dasselbe positive System und induzieren deshalb dieselbe Basis. Mit anderen Worten, zu jeder Weylkammer gehört eine Basis des Wurzelsystems und andersherum. Das folgende Theorem charakterisiert die eingangs erwähnte Weylgruppe.

Theorem. Sei Π eine Basis des reduzierten Wurzelsystems Δ . Weiterhin bezeichne W die Weylgruppe des Wurzelsystems. Dann gelten

- (1) W wirkt transitiv auf der Menge der Weylkammern.
- (2) W wirkt transitiv auf der Menge der Basen.
- (3) Für jede Wurzel α gibt es eine Folge von Spiegelungen $\sigma \in W$, so dass $\sigma(\alpha) \in \Pi$.
- (4) Die Weylgruppe wird schon von der Menge $\{\sigma_\alpha | \alpha \in \Pi\}$ erzeugt.
- (5) Die Wirkung von W ist frei, d.h. $\sigma(\Pi) = \Pi \iff \sigma = 1$.

Wendet man die Betrachtungen abstrakter Wurzelssysteme auf den Fall $\Delta \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ an, dann erhält man folgende Proposition.

Proposition. Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra mit aufspaltender Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} . Bezeichne Δ^+ ein fixiertes positives System in Δ mit zugehöriger Basis Π , d.h. Π besteht aus den unzerlegbaren Wurzeln in Δ^+ . Für jede Basiswurzel $\alpha \in \Pi$ bezeichne $\{h_\alpha, e_\alpha, f_\alpha\}$ ein zugehöriges \mathfrak{sl}_2 -Tripel (siehe \mathfrak{sl}_2 -Theorem).

- (1) Der Raum $\mathfrak{n} := \sum_{\beta \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\beta$ ist eine von $\{e_\alpha | \alpha \in \Pi\}$ erzeugte, nilpotente Unteralgebra von \mathfrak{g} .
- (2) Die \mathfrak{sl}_2 -Unteralgebren $\mathfrak{g}(\alpha) = \text{span}_{\mathbb{C}} \{h_\alpha, e_\alpha, f_\alpha\}$ mit $\alpha \in \Pi$ erzeugen \mathfrak{g} .