

Hamiltonsche Wirkungen und koadjungierte Bahnen kompakter Lie-Gruppen

Norman Metzner

29. September 2008

1 Allgemeines

Zu Beginn möchte ich einige allgemeine Worte zur mathematischen Modellierung von Symmetrien verlieren, die ein wenig klarer machen sollen, warum wir uns gerade mit den folgenden Strukturen beschäftigen. Dazu benötigen wir den Begriff der Wirkung.

Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Eine Abbildung

$$\sigma : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto \sigma(g, x) = \sigma_g(x) = \sigma_x(g) = g \cdot x$$

heißt *linke bzw. rechte Wirkung* von G auf X , falls gilt:

1. $\sigma(e, x) = x$ für alle $x \in X$, wobei e das neutrale Element von G ist;
2. $\sigma(h, \sigma(g, x)) = \sigma(hg, x)$ bzw. $\sigma(h, \sigma(g, x)) = \sigma(gh, x)$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

Im Folgenden werden wir oft nicht genauer spezifizieren, ob es sich um eine Links- oder eine Rechtswirkung handelt, sondern einfach von einer Wirkung sprechen. Die Menge X stellt dabei oft die Menge der physikalischen Zustände dar und ist zum Beispiel ein Vektorraum (Quantenmechanik) oder eine Mannigfaltigkeit (klassische Mechanik). Im Falle einer Mannigfaltigkeit M nennt man das Tripel (M, G, σ) eine *G -Mannigfaltigkeit*, wenn σ glatt ist. Die Gruppe G ist dabei in den meisten Fällen (sofern es um kontinuierliche Symmetrien geht) eine Lie-Gruppe, die sogenannte Symmetriegruppe. Die Symmetrieoperation wird nun durch die Wirkung σ beschrieben, d.h. symmetrische Zustände, also solche $x, y \in X$ für die ein $g \in G$ existiert mit $\sigma_g(x) = y$, repräsentieren physikalisch äquivalente Zustände. Man bezeichnet solche Zustände auch als *konjugiert*. Es handelt sich dabei um eine Äquivalenzrelation und die zugehörigen Äquivalenzklassen bezeichnet man als *Orbits* oder *Bahnen*, d.h. ein solcher Orbit \mathcal{O} ist dann

$$\mathcal{O} = \{\sigma_g(x) : g \in G\} \equiv \sigma_x(G).$$

Da σ_x die Gruppe G auf einen Orbit abbildet, heißt sie auch *Orbitabbildung*. Somit sind die physikalisch relevanten Objekte die Orbits. Die verschiedenen physikalischen Zustände entsprechen den verschiedenen Äquivalenzklassen. Deshalb versucht man zum Beispiel oft in der Quantenmechanik oder Teilchenphysik (dort, wo X ein Vektorraum ist), eine Darstellung in irreduzible zu zerlegen, denn jede irreduzible Darstellung charakterisiert einen physikalischen Zustand.

Wir werden uns nun näher mit dem Fall beschäftigen, in dem G eine (kompakte) Lie-Gruppe ist, die auf einer glatten Mannigfaltigkeit M wirkt. Die Abbildung σ wird dabei als glatt vorausgesetzt.

2 Mannigfaltigkeitsstruktur auf Bahnen

Wie eben beschrieben, haben wir im Vektorraumfall irreduzible Unterräume gesucht. Gleiches möchten wir nun auch im Fall von Mannigfaltigkeiten machen, das heißt wir fragen uns zunächst, ob ein Orbit der gegebenen Wirkung selbst wieder eine Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt. Die Antwort gibt der nächste Satz. Um diesen zu formulieren, benötigen wir den *Stabilisator* (oder *Isotropiegruppe*, *Standgruppe*) von $m \in M$, welcher die Teilmenge

$$G_m = \{g \in G : \sigma_g(m) = m\}$$

von G ist. Da $\{m\} \subseteq M$ abgeschlossen (im topologischen Sinn) und σ_m stetig ist, ist $\sigma_m^{-1}(\{m\}) = G_m$ eine abgeschlossene Untergruppe von G und damit nach einem früheren Satz eine eingebettete Lie-Untergruppe von G . Mit G/G_m bezeichnen wir die Menge der Nebenklassen (Links- bzw. Rechtsnebenklassen im Falle einer Links- bzw. Rechtswirkung).

Satz 2.1. *Sei (M, G, σ) eine G -Mannigfaltigkeit, sei $m \in M$ und \mathcal{O} der Orbit von m . Die Menge der Nebenklassen G/G_m trägt eine Mannigfaltigkeitsstruktur und die Orbitabbildung σ_m induziert eine injektive Immersion*

$$G/G_m \rightarrow M,$$

deren Bild gerade \mathcal{O} ist. Das heißt, G/G_m ist \mathcal{O} eine (immersierte) Untermannigfaltigkeit von M . In dem Fall einer kompakten Lie-Gruppe G ist G/G_m sogar eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M .

Ein Beweis findet sich [Bre72] innerhalb der Seiten 300-305 oder in [Hil07], Proposition 8.4.11.

3 Abgeleitete Wirkung der Lie-Algebra und induzierte Wirkung auf Formen

Eine glatte Wirkung induziert ebenso eine Wirkung auf Formen und eine Wirkung der Lie-Algebra, welche in diesem Abschnitt definiert und einige ihrer Eigenschaften gezeigt werden.

Sei G eine Lie-Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine glatte Gruppenwirkung. Man bezeichnet dann die Abbildung

$$\dot{\sigma} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad \dot{\sigma}(\xi)_m := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\exp t\xi) \cdot m)$$

als *Ableitung von σ* oder *abgeleitete Wirkung der Lie-Algebra als Vektorfeld*.

Proposition 3.1. *Sei G eine Lie-Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine glatte Gruppenwirkung, dann gilt:*

(i) $[\dot{\sigma}(\xi), \dot{\sigma}(\eta)] = \dot{\sigma}([\eta, \xi])$ für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

(ii) $\sigma_g \cdot (\dot{\sigma}(\xi)) = \dot{\sigma}(\text{Ad}(g)\xi)$ für alle $g \in G$ und $\xi \in \mathfrak{g}$. Dabei ist $\sigma_g \cdot (\dot{\sigma}(\xi)) = (\sigma_g)_*(\dot{\sigma}(\xi))$ das Pushforward des Vektorfeldes $\dot{\sigma}(\xi)$ mit der Abbildung σ_g .

Beweis. Für den Beweis benutzen wir die Relationen zwischen der Konjugation I_g und Ad , zwischen ad und Ad und der Beschreibung der Lie-Ableitung durch Flüsse.

$$\begin{aligned} \sigma_g \cdot (\dot{\sigma}(\xi))(m) &= (\sigma_g)_*(\dot{\sigma}(\xi)(\sigma_g^{-1}(m))) && \text{Definition, wie ein Diffeomorphismus von } M \text{ auf ein Vektorfeld auf } M \text{ wirkt} \\ &= (\sigma_g)_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\exp t\xi) \cdot \sigma_g^{-1}(m)) \right) && \text{Definition der Ableitung von } \sigma \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\sigma_g((\exp t\xi)g^{-1} \cdot m)) && \text{Pushforward mittels Transport der Kurve} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g(\exp t\xi)g^{-1} \cdot m) && \text{Definition von } \sigma_g \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(\text{Ad}(g)t\xi) \cdot m) && \text{Relation zwischen Ad und } I_g \\ &= \dot{\sigma}(\text{Ad}(g)\xi)(m) && \text{per Definition von } \dot{\sigma} \end{aligned}$$

Damit ist (ii) gezeigt. Setzen wir nun $g = \exp t\eta$ und differenzieren bzgl. t , dann erhalten wir mit $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp t\xi) = \text{ad } \xi$ die Relation

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\sigma_{\exp t\eta} \cdot \dot{\sigma}(\xi))(m) = \dot{\sigma}([\eta, \xi])(m).$$

Dies kann mit Hilfe der Lie-Ableitung wie folgt ausgedrückt werden

$$[\dot{\sigma}(\eta), \dot{\sigma}(\xi)](m) = \mathcal{L}_{\dot{\sigma}(\eta)}\dot{\sigma}(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_{\exp(-t\eta)} \cdot \dot{\sigma}(\xi) = -\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_{\exp t\eta} \cdot \dot{\sigma}(\xi),$$

woraus $\dot{\sigma}([\eta, \xi]) = [\dot{\sigma}(\xi), \dot{\sigma}(\eta)]$ folgt. \square

Definieren wir $L\sigma = -\dot{\sigma}$, dann erhalten wir einen Homomorphismus von Lie-Algebren $L\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(M)$. Auf Formen wirkt σ durch das Pullback.

4 Symplektische Wirkungen

Bevor wir über symplektische Wirkungen sprechen, führe ich kurz die Grundbegriffe der symplektischen Geometrie ein. Eine *symplektische Form* ω auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine geschlossene, nicht-entartete 2-Form. Das Paar (M, ω) heißt *symplektische Mannigfaltigkeit*. Eine Abbildung $\sigma : M \rightarrow M$ heißt *Symplektomorphismus*, falls $\sigma^*\omega = \omega$ gilt. Ein Vektorfeld \mathfrak{X} auf M heißt *symplektisch*, falls seine lokalen Flüsse Symplektomorphismen sind. Die Menge der symplektischen Vektorfelder wird mit $\text{Symp}(M, \omega)$ bezeichnet. Außerdem sprechen wir bei einer Wirkung $\sigma : G \times M \rightarrow M$ von einer *symplektischen Wirkung*, wenn σ_g für alle $g \in G$ ein Symplektomorphismus ist, d.h. $\sigma_g^*\omega = \omega$ für alle $g \in G$.

Des Weiteren definiert jedes $f \in C^\infty(M)$ ein Vektorfeld \mathfrak{X}_f durch

$$\omega(\mathfrak{X}_f, \cdot) = df(\cdot).$$

\mathfrak{X}_f ist dann das *Hamiltonsche Vektorfeld* zur *Hamiltonfunktion* f . Die Menge der Hamiltonschen Vektorfelder wird mit $\text{Ham}(M, \omega)$ bezeichnet. In der Physik liegen diese mathematischen Strukturen unter anderem der Hamiltonschen Mechanik zugrunde. In der Hamiltonschen Mechanik untersucht man sogenannte Hamiltonsche Systeme. Dies sind Tripel (M, ω, H) , wobei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit (der „Phasenraum“) und H eine glatte Funktion auf M (die „Hamiltonfunktion“) ist. Symplektische Wirkungen auf einem Hamiltonschen System lassen die symplektische Struktur invariant, was wir bei einer physikalisch relevanten Symmetrie auch erwarten würden.

Proposition 4.1. *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine glatte Wirkung. Dann gilt:*

$$\sigma \text{ ist symplektisch} \iff L\sigma(\xi) \in \text{Symp}(M, \omega), \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Sei F_t der Fluss $\dot{\sigma}(\xi)$. Der Term

$$\mathcal{L}_{\dot{\sigma}(\xi)}\omega(m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_t^*\omega)(m)$$

verschwindet genau dann, wenn $\dot{\sigma}(\xi)$ symplektisch an $t = 0$ ist. Aus der $F_t \cdot F_s = F_{t+s}$, folgt dies leicht für beliebige Zeitpunkte (siehe zum Beispiel [Hil07], Proposition 7.3.2). Damit gilt:

$$\mathcal{L}_{\dot{\sigma}(\xi)}\omega = 0 \iff \dot{\sigma}(\xi) \in \text{Symp}(M, \omega).$$

Da $\sigma_{\exp t\xi}$ der lokale Fluss von $\dot{\sigma}(\xi)$ ist und $\{\exp t\xi : t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathfrak{g}\}$ die Gruppe G in einer Umgebung der 1 erzeugt, folgt die Behauptung. \square

Aus der Gleichung $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}\omega = d(\iota_{\mathfrak{X}}\omega) + \iota_{\mathfrak{X}}d\omega = d(\iota_{\mathfrak{X}}\omega)$ (benutze $d\omega = 0$) und dem ersten Schritt im letzten Beweis folgt die Äquivalenz

$$\mathfrak{X} \in \text{Symp}(M, \omega) \iff d(\iota_{\mathfrak{X}}\omega) = 0.$$

Für jedes Hamiltonsche Vektorfeld \mathfrak{X}_H gilt jedoch $d(\iota_{\mathfrak{X}_H}\omega) = d(dH) = 0$, d.h. $\text{Ham}(M, \omega) \subseteq \text{Symp}(M, \omega)$. Somit erhalten wir eine Abbildung $j : C^\infty(M) \rightarrow \text{Symp}(M, \omega), H \mapsto \mathfrak{X}_H$. Das folgende Theorem gibt nun eine Möglichkeit an, wie Bewegungskonstanten konstruiert werden können, d.h. Größen, die entlang der Integralkurven von \mathfrak{X}_H invariant sind. Fixiert man nun die Werte der vorhandenen Bewegungskonstanten, dann definiert das eine eingebettete Untermannigfaltigkeit des gesamten Konfigurationsraumes M , welcher invariant unter der Dynamik des Systems ist. Die bekanntesten unter den Bewegungskonstanten sind sicher die Energie (Hamiltonfunktion selbst), der Impuls und der Drehimpuls.

Theorem 4.2 (Noether). *Sei G eine Lie-Gruppe und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine symplektische Wirkung. Wenn eine Abbildung $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ existiert, sodass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} & & C^\infty(M) \\ & \nearrow \mu & \downarrow j \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{L\sigma} & \text{Symp}(M, \omega) \end{array}$$

kommutiert, und wenn weiterhin die Hamiltonfunktion $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ invariant unter G ist ($H(g \cdot m) = H(m) \forall g \in G, m \in M$), dann sind alle $\mu(\xi), \xi \in \mathfrak{g}$, Bewegungskonstanten, d.h. für jede Integralkurve γ von \mathfrak{X}_H ist $\mu(\xi) \circ \gamma$ konstant.

Beweis. Der Beweis ist direktes Nachrechnen.

$$(\dot{\sigma}(\xi) \cdot H)(m) = dH(\dot{\sigma}(\xi))(m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(\sigma_{\exp t\xi} \cdot m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(m) = 0,$$

wobei der erste Schritt nur im Umschreiben der Definition besteht und im vorletzten Schritt die G -Invarianz von H ausgenutzt wird. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_H \cdot \mu(\xi) &= d\mu(\xi)(\mathfrak{X}_H) = \omega(\mathfrak{X}_{\mu(\xi)}, \mathfrak{X}_H) = -\omega(\mathfrak{X}_H, \mathfrak{X}_{\mu(\xi)}) = -\mathfrak{X}_{\mu(\xi)} \cdot H \\ &= -L\sigma(\xi) \cdot H = \dot{\sigma}(\xi)(H) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

und somit ist $\mu(\xi)$ eine Bewegungskonstante. \square

Aus der theoretischen Mechanik kennen wir das Noethertheorem in der Form, dass zu jeder Symmetrie des physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße existiert. Obige Aussage ist ein wenig schwächer, denn wir haben nichts über die Existenz einer solchen Abbildung μ gesagt. Diese Diskrepanz verschwindet im nächsten Abschnitt, wo wir Hamiltonsche Wirkungen betrachten werden.

Beispiel 4.3.

- (i) Wir betrachten den \mathbb{R}^{2n} mit der symplektischen Form $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$ und $G = \mathbb{R}^n$. Durch

$$\sigma(\xi, (q, p)) = (q + \xi, p)$$

wird eine glatte Wirkung von G auf \mathbb{R}^{2n} definiert, deren Ableitung durch

$$\dot{\sigma}(\xi)(q, p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (q + t\xi, p) = (\xi, 0)$$

gegeben ist (benutze $\exp t\xi = t\xi$). Damit gilt $\iota_{\dot{\sigma}(\xi)}\omega = \sum_i \xi_i dp_i$. In diesem Fall ist das Hamiltonsche Vektorfeld gegeben durch

$$\mathfrak{X}_f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Unter der Annahme $-\dot{\sigma}(\xi) = \mathfrak{X}_f$ lässt sich daraus ableiten

$$\xi_i = \iota_{\dot{\sigma}(\xi)}\omega \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right) = -\omega \left(\mathfrak{X}_f, \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = -\frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

Diese Gleichung ist zum Beispiel in dem Fall $f(q, p) = -\sum_i \xi_i p_i = (\xi | p)$ erfüllt. Gleichung (1) impliziert aber

$$d\mu(\xi)(a) = -L\sigma(\xi)(a) = \dot{\sigma}(\xi)(a), \quad \forall a \in C^\infty(M),$$

d.h. die Erhaltungsgröße ist in diesem Fall gegeben durch $\mu(\xi) = -(\xi | p)$, der Komponente des Impulses in ξ -Richtung. Zum Abschluss sei bemerkt, dass

$$\{\mu(\xi), \mu(\eta)\} = \{(\xi | p), (\eta | p)\} = 0 = \mu([\xi, \eta]).$$

Die linke Seite ist dabei Null, weil die q_i -Ableitungen verschwinden und die rechte, weil $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ konstante Vektorfelder sind und damit $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] = [\xi, \eta] = 0$. Die Abbildung $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ ist damit insbesondere ein Homomorphismus von Lie-Algebren (die Bedeutung dieser Aussage werden wir später noch erkennen).

- (ii) Für den \mathbb{R}^6 mit der gleichen symplektischen Form wie im vorigen Beispiel und $G = \text{SO}(3)$ mit der Wirkung

$$g \cdot (q, p) = (gq, gp)$$

kann man analog vorgehen und erhält für μ den Drehimpuls (siehe [Hil07], Example 8.2.3 (iii)).

- (iii) Ein weiteres interessantes Beispiel ist der Fall des Kotangentialbündels $M = T^*N$ mit seiner natürlichen symplektischen Form ((siehe [Hil07], Example 8.2.3 (iv)).

Bevor wir zur Impulsabbildung kommen, führen wir eine weitere Klasse wichtiger Wirkungen ein.

5 Hamiltonsche Wirkungen und die Impulsabbildung

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe. Eine symplektische Wirkung $\sigma : G \times M \rightarrow M$ heißt *fast Hamiltonsch*, falls $L\sigma(\xi) \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$, und sie heißt *Hamiltonsch*, falls ein Homomorphismus von Lie-Algebren $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ existiert mit $\mathfrak{X}_{\mu(\xi)} = L\sigma(\xi)$. Die Struktur einer Lie-Algebra auf $C^\infty(M)$ ist dabei durch die *Poisson-Klammer* gegeben $\{f, g\} = \omega(\mathfrak{X}_f, \mathfrak{X}_g)$ (Beweis siehe [Hil07] Proposition 7.3.4). Nun zwei hinreichende Bedingungen für die erste Eigenschaft.

Um wie oben den Bezug zur Physik herzustellen, sieht man, dass fast Hamiltonsche Wirkungen solche sind, wo für jede Symmetrie (symplektische Wirkung) eine Erhaltungsgröße μ existiert. Erhält diese Abbildung auch noch die Struktur der Lie-Algebren, heißt die Wirkung Hamiltonsch.

Proposition 5.1. *Sei $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine symplektische Wirkung. Dann gilt:*

(i) *Wenn $H_{dR}^1(M, \mathbb{R}) = 0$ ist, dann ist σ fast Hamiltonsch.*

(ii) *Wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, dann ist σ fast Hamiltonsch.*

Für einen Beweis siehe [Hil07], Proposition 8.3.1.

Sei jetzt $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine Hamiltonsche Wirkung und $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ der zugehörige Homomorphismus von Lie-Algebren. Die *Impulsabbildung* von (σ, μ) ist dann die Abbildung $P : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definiert durch

$$\langle P(m), \xi \rangle := \mu(\xi)(m).$$

Man kann P auch für fast Hamiltonsche Wirkungen definieren, nennt es dann allerdings nicht mehr Impulsabbildung. Die Impulsabbildung ist ein

Werkzeug, mit dem man in der symplektischen Geometrie Erhaltungsgrößen konstruiert. Sie verallgemeinert die klassischen Begriffe des linearen und des Drehimpulses.

Eine wichtige Rolle in diesem Kontext spielt die koadjungierte Darstellung. Sei dafür G eine Lie-Gruppe, $g \in G$ und $\xi \in \mathfrak{g}$. Die Abbildung $\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*)$ definiert durch

$$\langle (\text{Ad}^* g)f, \xi \rangle := \langle f, (\text{Ad } g^{-1})\xi \rangle$$

heißt *koadjungierte Darstellung* von G . Verkürzt schreibt man auch $g \cdot f$ für $(\text{Ad}^* g)f$. Im fast Hamiltonschen Fall gilt die folgende Proposition.

Proposition 5.2. *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und $\sigma : G \times M \rightarrow M$ eine fast Hamiltonsche Wirkung bezüglich der linearen Abbildung $\mu : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$. Sei $P : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definiert durch $\langle P(m), \xi \rangle = \mu(\xi)(m)$ für $\xi \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$, dann gilt:*

$$P \text{ ist } G\text{-äquivariant.} \iff \mu \text{ ist ein Homomorphismus.}$$

Bemerkung 5.3. G -Äquivarianz von P bedeutet, dass $P(g \cdot m) = g \cdot P(m)$, wobei G auf \mathfrak{g}^* mittels der koadjungierten Darstellung wirkt.

Der Beweis findet sich in [Hil07], Proposition 8.3.8.

Beispiel 5.4.

- (i) Betrachten wir die Situation aus Beispiel (4.3)(i). Dann setzen wir $(\mu(\xi))(q, p) = -\xi \cdot p$ und erhalten $P(q, p) = -p$, (bis auf ein Vorzeichen) der lineare Impuls.
- (ii) Wählen wir in der Situation aus Beispiel (4.3)(ii) eine geeignete Basis von $\mathfrak{so}(3)$, dann hat $P(q, p)$ gerade die Komponenten des klassischen Drehimpulses.

6 Koadjungierte Orbits

Zu Beginn dieses Abschnitts einige Worte zur Motivation, warum wir uns gerade mit koadjungierten Orbits beschäftigen. Zum ersten tauchen symplektische Mannigfaltigkeiten im Kontext der koadjungierten Wirkung ganz natürlich auf und zum zweiten gibt es eine enge Verknüpfung mit der Darstellungstheorie der Lie-Gruppe G . Genauer gesagt gilt für nilpotente (einfach zusammenhängende) Lie-Gruppen, dass der Raum der Äquivalenzklassen unitärer irreduzibler Darstellungen homöomorph zum Raum der koadjungierten Bahnen ist. Für andere Klassen von Lie-Gruppen gelten abgeschwächte Aussagen. Welche Bedeutung irreduzible Darstellungen einer Lie-Gruppe haben, wurde bereits in Abschnitt 1 geschildert.

Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und sei $f_0 \in \mathfrak{g}^*$. Des Weiteren sei $\mathcal{O} := G \cdot f_0$ der Orbit von f_0 unter der koadjungierten Wirkung und G_{f_0} der zugehörige Stabilisator. G_{f_0} ist wie früher bereits erwähnt eine abgeschlossene Untergruppe von G . Satz 2.1 besagt, dass jeder dieser Orbits eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von \mathfrak{g}^* ist. Im Folgenden werden wir sehen, wie auf diesen Orbits in natürlicher Weise eine symplektische Form existiert. Zuerst definieren wir für $\xi \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\text{ad}^* \xi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ durch

$$\langle \text{ad}^* \xi(f), \eta \rangle = -\langle f, \text{ad} \xi(\eta) \rangle, \quad \forall f \in \mathfrak{g}^*,$$

und

$$\mathfrak{g}_{f_0} := \{\xi \in \mathfrak{g} : \text{ad}^* \xi(f_0) = 0\}.$$

(\mathfrak{g}_{f_0} ist der Kern der Orbitabbildung $(\text{Ad}^*(\cdot))_*(1)$.) Für $f \in \mathfrak{g}^*$ betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} L_f : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}^*, \\ \xi &\mapsto \text{ad}^* \xi(f) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B_f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\xi, \eta) &\mapsto -\langle f, [\xi, \eta] \rangle. \end{aligned}$$

Aus $B_f(\xi, \eta) = \langle \text{ad}^* \xi(f), \eta \rangle = -\langle \text{ad}^* \eta(f), \xi \rangle$ folgt, dass B_f zu einer nicht-entarteten alternierenden Bilinearform $\bar{B}_f : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f \times \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f \rightarrow \mathbb{R}$ faktorisiert. Da $\bar{L}_f : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f \rightarrow \text{Im } L_f$ ein linearer Isomorphismus ist, induziert \bar{B}_f wiederum eine nicht-entartete alternierende Bilinearform

$$\omega_f : \text{Im } L_f \times \text{Im } L_f \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sei nun $f \in G \cdot f_0 = \mathcal{O}$. Dann gilt $\text{Im } L_f = T_f \mathcal{O}$ (Beweis siehe [Hil07] Theorem 8.4.6), was uns wiederum die Abbildung

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{O} &\rightarrow (T\mathcal{O})^* \wedge (T\mathcal{O})^*, \\ f &\mapsto \omega_f \end{aligned}$$

liefert. Nun gilt folgendes Lemma.

Lemma 6.1. $L_f(g \cdot \xi) = g \cdot L_{f_0}(\xi)$, mit anderen Worten das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad } g} & \mathfrak{g} \\ L_{f_0} \downarrow & & \downarrow L_{g \cdot f_0} \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\text{Ad}^* g} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

Beweis. Die Gleichheit folgt direkt aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
\langle L_f(g \cdot \xi), \eta \rangle &= \langle \text{ad}^*(\text{Ad } g(\xi))(g \cdot f_0), \eta \rangle \\
&= \langle g \cdot f_0, -[\text{Ad } g(\xi), \eta] \rangle \\
&= \left\langle f_0, -\left[\text{Ad } g^{-1}(\text{Ad } g(\xi)), \text{Ad } g^{-1}(\eta)\right] \right\rangle \\
&= \left\langle f_0, -\left[\xi, \text{Ad } g^{-1}(\eta)\right] \right\rangle \\
&= \langle \text{ad}^* \xi(f_0), \text{Ad } g^{-1}(\eta) \rangle \\
&= \langle g \cdot (\text{ad}^* \xi(f_0)), \eta \rangle \\
&= \langle g \cdot L_{f_0}(\xi), \eta \rangle
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Zeile ausgenutzt, dass $\text{Ad } g^{-1}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist; die vierte Zeile folgt aus der Darstellungseigenschaft von Ad und sonst wurden nur die Definitionen von Ad^* , ad^* und L_f eingesetzt. \square

Nehmen wir nun an, dass $f = g \cdot f_0$, $l = g \cdot l_0$, $l' = g \cdot l'_0$ mit $l_0 = L_{f_0}(\xi)$, $l'_0 = L_{f_0}(\xi') \in \mathfrak{o}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\omega_f(l, l') &= \omega_f(g \cdot L_{f_0}(\xi), g \cdot L_{f_0}(\xi')) && \text{Definition von } l, l' \\
&= \omega_f(L_f(\text{Ad } g(\xi)), L_f(\text{Ad } g(\xi'))) && \text{obiges Lemma} \\
&= B_f(\text{Ad } g(\xi), \text{Ad } g(\xi')) && \text{Definition von } \omega_f \\
&= -\left\langle g \cdot f_0, [\text{Ad } g(\xi), \text{Ad } g(\xi')] \right\rangle && \text{Definition von } B_f \text{ und } f \\
&= -\left\langle f_0, [\xi, \xi'] \right\rangle && \text{Definition von } \text{Ad}^* g \text{ und} \\
& && \text{Ausnutzen, dass } \text{Ad } g \\
& && \text{Automorphismus von } \mathfrak{g} \\
&= \omega_{f_0}(l_0, l'_0) && \text{Definition von } \omega,
\end{aligned}$$

d.h. ω ist G -invariant. Insbesondere existiert eine spezielle Trivialisierung, in der ω durch die konstante Funktion $f \mapsto \omega_{f_0}$ gegeben ist (siehe [Hil07] Construction 8.4.8). Das bedeutet, ω ist glatt und geschlossen, demzufolge eine 2-Form. Wir können damit das zentrale Theorem dieses Abschnitts formulieren.

Theorem 6.2. *Sei \mathcal{O} ein Orbit der koadjungierten Wirkung. Dann ist (\mathcal{O}, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. $\sigma : G \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, $\sigma(g, f) = g \cdot f$ ist eine Hamiltonsche Wirkung bzgl. des Homomorphismus $\mathfrak{g} \ni \xi \xrightarrow{\mu} \mu(\xi) \in C^\infty(\mathcal{O})$ mit $\mu(\xi)(f) = f(\xi)$, für welche die Impulsabbildung durch die Inklusion $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ gegeben ist.*

Beweis siehe [Hil07] Theorem 8.4.9.

Bemerkung 6.3 (Kurzbeschreibung der symplektischen Form). Sei $f = g \cdot f_0 \in \mathcal{O}$ ein Element des Orbits von $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ und $X, Y \in T\mathcal{O}$. Die Gruppenwirkung ist nun die koadjungierte Wirkung $g \cdot f_0 = \text{Ad}^*(g)f_0 = f_0 \circ \text{Ad}(g)^{-1}$. Einen Tangentialvektor in f an \mathcal{O} erhält man durch das Ableiten einer Kurve (in \mathcal{O}) durch f . Nach Definition des Orbits hat die Menge dieser Kurven genau die Gestalt $\text{Ad}^*g(t)(f)$, wobei $g(t)$ eine Kurve in G mit $g(0) = e$ ist. Betrachte zum Beispiel die Kurve $\gamma(t) = \text{Ad}^*(\exp(t\xi_X))f \subseteq \mathcal{O}$, $\xi_X \in \mathfrak{g}$. Dann ist $\gamma(0) = f$ und

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f \circ \text{Ad}(\exp(-t\xi_X)) = f \circ \text{ad}(-\xi) = \text{ad}^*(\xi)f.$$

Das heißt, für alle $X_f \in T_f\mathcal{O}$ existiert ein $\xi_X \in \mathfrak{g}$ mit

$$X_f = \text{ad}^*(\xi_X).$$

Die symplektische Form hat dann die Gestalt

$$\omega(X, Y)(f) = \omega_f(X_f, Y_f) = -\langle f, [\xi_X, \xi_Y] \rangle = -f([\xi_X, \xi_Y])$$

mit $X_f = \text{ad}^*(\xi_X)f$ und $Y_f = \text{ad}^*(\xi_Y)f$.

Zum Abschluss einige Beispiele für das obige Theorem.

Beispiel 6.4.

- (i) Falls G abelsch ist, ist I_g und damit Ad die Identität und somit sind die koadjungierten Orbits Punkte.
- (ii) Die zwei weiteren Beispiele beziehen sich auf halbeinfache Lie-Gruppen G , d.h. die Lie-Algebra \mathfrak{g} ist halbeinfach. In diesem Fall ist die Killingform nicht-entartet und ist damit eine Möglichkeit \mathfrak{g} und \mathfrak{g}^* zu identifizieren. Im Falle von halbeinfachen und linearen Lie-Gruppen gilt dann, dass die koadjungierten Orbits mittels dieser Identifikation den Bahnen in \mathfrak{g} unter G mit der Ad -Wirkung entsprechen. Da die Gruppen linear sind gilt wegen der Linearität von I_g sogar $\text{Ad } g = (I_g)_*(1) = I_g$. Betrachten wir zuerst das Beispiel $G = \text{SO}(3)$. Bezüglich der Basis

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{so}(3)$ gilt

$$\text{ad}_{L_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{L_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{L_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\text{Ad } G$ von $e^{\text{ad } \mathbb{R}L_i}, i = 1, 2, 3$, erzeugt wird, sind die koadjungierten Orbits Sphären (die $e^{\text{ad } \mathbb{R}L_i}$ sind Drehungen).

(iii) Als zweites Beispiel sei die $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ vorgestellt. Mit der Basis

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

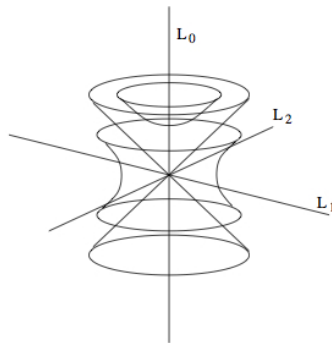
für $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ erhalten wir

$$[L_0, L_1] = 2L_2, [L_2, L_0] = 2L_1, [L_1, L_2] = -2L_0.$$

Dies impliziert

$$\text{ad}_{L_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ad}_{L_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ad}_{L_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $e^{\text{ad } \mathbb{R}L_0}$ eine Drehmatrix und $e^{\text{ad } \mathbb{R}L_i}, i = 1, 2$ sind Lorentz-Boosts. Die koadjungierten Orbits müssen demzufolge Hyperboloide sein.



Literatur

- [Bre72] Glen E. Bredon: *Introduction to Compact Transformation Groups*. Academic Press Inc, 1972.
- [Hil07] Joachim Hilgert: *Global Analysis*. 2007.
- [Lee06] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 2006.

[Rud] Gerd Rudolph: *Vorlesungen zur Mathematischen Physik Teil I: Mannigfaltigkeiten, Tensorfelder und Hamiltonsche Systeme.*