

Wissenschaftliches Kolleg 1. Woche

Angela Klamt

02.04.2008

4 Grundlegende Strukturen der Lie-Algebren Theorie

4.6 Die Sätze von Levi und Malcev

Ich beschäftigte mich in meinem Vortrag mit dem Satz von Levi. Dieser hat als Resultat eine Zerlegung allgemeiner Lie-Algebren, sodass wir damit die grobe Zerlegung von Lie-Algebren abschließen können.

Theorem 4.6.6 (Satz von Levi). *Es sei $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{s}$ ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren und \mathfrak{s} sei halbeinfach. Dann existiert ein Homomorphismus $\beta : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit $\alpha \circ \beta = id_{\mathfrak{s}}$.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{n} := \ker(\alpha)$.

Den Beweis führt man zum einen per Induktion über die Dimension von \mathfrak{n} . Wenn \mathfrak{n} nicht minimal ist, so kann man induktiv einen Homomorphismus β mit den gewünschten Eigenschaften angeben.

Wenn \mathfrak{n} minimal ist, so sucht man eine komplementäre Unteralgebra von \mathfrak{g} . Die Idee hierbei ist, dass \mathfrak{n} abelsch ist und man durch Anwendung des Satzes von Weyl in unterschiedlichen Fällen komplementäre Darstellungen finden kann. Der Beweis ist recht lang, da man einige verschiedene Fälle betrachten muss.

Um diesen Satz nun auf die Zerlegung von Lie-Algebren anwenden zu können, braucht man eine weitere Definition und ein Korollar.

Definition 4.6.7. \mathfrak{g} sei eine endlich dimensionale Lie-Algebra und $rad \mathfrak{g}$ ihr Radikal. Dann wird die Unteralgebra $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{g}$, welche komplementär zu $rad \mathfrak{g}$ ist, Levi-Komplement genannt. Es gilt demnach $\mathfrak{g} = rad \mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{s}$.

Korollar 4.6.8. *Jede endlich dimensionale Lie-Algebra enthält ein halbeinfaches Levi-Komplement.*

Aus diesem Korollar können wir nun eine Zerlegung von einer allgemeinen Lie-Algebra folgern.

Bemerkung 4.6.12. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{t} + \mathfrak{s}$, wobei \mathfrak{t} auflösbar und \mathfrak{s} halbeinfach ist. Wir haben zuvor schon gesehen, dass wir so für $\mathfrak{t} \cong (\dots((\mathfrak{t}_1 \rtimes_{\alpha_1} \mathfrak{t}_2) \rtimes_{\alpha_2} \mathfrak{t}_3) \dots \rtimes_{\alpha_{n-1}} \mathfrak{t}_n)$ schreiben können, wobei $\mathfrak{t}_i \cong \mathbb{K}$.

Desweiteren wissen wir, dass $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \dots + \mathfrak{s}_m$ mit \mathfrak{s}_i einfach. Daher wissen wir nun also auch, dass $\mathfrak{g} \cong (\dots((\mathfrak{g}_1 \rtimes_{\alpha_1} \mathfrak{g}_2) \rtimes_{\alpha_2} \mathfrak{g}_3) \dots \rtimes_{\alpha_{n-1}} \mathfrak{g}_{n+m})$, wobei \mathfrak{g}_i entweder eindimensional oder einfach sind.