

# Zusammenfassung | Kolleg I

## Lie Gruppen & Algebren :: Die Wurzelzerlegung

by Johannes Thürigen & Wieland Brendel

---

### 1 Wurzelzerlegung

In den vorherigen Kapiteln wurde ausführlich die Zerlegung von auflösbaren und halbeinfachen Lie Algebren behandelt. Die dort verwendeten Werkzeuge sind aber zu grob, um auch bei einfachen Lie Algebren erfolgreich zu sein: Einfache Lie Algebren enthalten nach Definition keine Ideale (außer  $\{0\}$  und sich selbst) und lassen sich damit nicht in Ideal  $\mathfrak{n}$  und Quotient  $\mathfrak{h}/\mathfrak{n}$  zerlegen.

Um trotzdem einen Einblick in einfache Lie Algebra  $\mathfrak{h}$  zu erhalten, benötigen wir feinere Werkzeuge, so genannte Wurzeln und Cartan Unteralgebren. Dazu betrachten wir genauer die Eigenräume der Elemente aus  $x \in \mathfrak{h}$ . Sei dazu  $(\pi, V)$  eine Darstellung von  $\mathfrak{h}$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  und nehmen wir an, dass in  $\mathbb{K}$  alle Eigenwerte von  $\pi(x)$  liegen. Ist nun  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$  eine beliebige Funktion und alle  $\lambda(x)$  jeweils Eigenwert von  $x \in \mathfrak{h}$ , so fassen wir alle Eigenvektoren, die simultan in allen Eigenräumen  $V_{\lambda(x)}(\pi(x))$  liegen, zu einer neuen Menge  $V_\lambda$  zusammen.

#### Definition 1.1.

Sei  $(\pi, V)$  eine Darstellung der Lie Algebra  $\mathfrak{h}$ . Definiere für eine beliebige Funktion  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$  einen entsprechenden *Gewichtsraum* und einen dazugehörigen *verallgemeinerten Gewichtsraum* durch

$$V_\lambda(\mathfrak{h}) := \bigcap_{x \in \mathfrak{h}} V_{\lambda(x)}(\pi(x)) \quad \text{and} \quad V^\lambda(\mathfrak{h}) := \bigcap_{x \in \mathfrak{h}} V^{\lambda(x)}(\pi(x)).$$

Jede Funktion  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $V^\lambda(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$  nennt man *Gewicht der Darstellung*  $(\pi, V)$ . Schreibe  $\mathcal{P}_\mathfrak{h}(V)$  für die Menge der Gewichte von  $(\pi, V)$ .

Wir beschränken uns nun auf einen **speziellen Fall**, in dem der Vektorraum  $(V)$  eine Lie Algebra  $\mathfrak{g}$ , die Lie-Algebra  $\mathfrak{h}$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ , und die Darstellung  $\pi$  die Adjungierte  $\text{ad}|_\mathfrak{h}$  ist. In einem solchen Fall nennen wir alle Gewichte  $\lambda \neq 0$  *Wurzeln* von  $\mathfrak{g}$  und schreiben  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  für die Menge aller Wurzeln. Die verallg. Gewichtsräume heißen *Wurzelräume*.

Dann folgt das zentrale Lemma dieses Abschnitts, die sogenannte Wurzelzerlegung:

#### Lemma 1.2.

Sei  $(\pi, \mathfrak{g})$  eine Darstellung der nilpotenten Lie Algebra  $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$  so, dass alle Eigenwerte in  $\mathbb{K}$  liegen ( $\Leftrightarrow \pi(x)$  zerlegbar  $\forall x \in \mathfrak{h}$ ). Dann ist jedes Gewicht linear und  $\mathfrak{g}$  kann zerlegt werden in

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$$

Weiter ist jeder verallgemeinerte Gewichtsraum  $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$   $\mathfrak{h}$ -invariant.

Man kann leicht zeigen, dass  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$  ist und  $\mathfrak{h}$  enthält. Ist  $\mathfrak{h}$  neben nilpotent sogar noch sein eigener Normalisator, d.h.  $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$ , so ist sogar  $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  und damit die obige Aufspaltung besonders fein. Man nennt ein solches  $\mathfrak{h}$  eine *Cartan Unteralgebra*. Cartan Unteralgebren sind immer maximal nilpotent.

Ist also  $\mathfrak{h}$  eine Cartan-Unteralgebra, so erhalten wir die Aufspaltung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \lambda \neq 0}} \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$$

wenn  $\mathfrak{h}^*$  die Menge der linearen Abbildung von  $\mathfrak{h}$  nach  $\mathbb{K}$  beschreibt. Ein Beispiel sollte den Begriff der Cartan Algebra verdeutlichen können:

### Beispiel 1.3.

Sei  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}h + \mathbb{R}p + \mathbb{R}q + \mathbb{R}z$  eine Oszillator Algebra. Dann ist  $\mathfrak{h} = \mathbb{R}h + \mathbb{R}z$  eine Cartan Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ .

*Proof.* Es gelten nach Bsp. 4.1.19 die Kommutatorrelationen  $[p, q] = z$ ,  $[h, p] = q$ ,  $[h, q] = -p$ . Alle anderen Kommutatoren sind Null. Dann ist  $\mathfrak{h} = \mathbb{R}h + \mathbb{R}z$  nilpotent nach Def. 4.2.1. wegen  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = [\mathbb{R}h + \mathbb{R}z, \mathbb{R}h + \mathbb{R}z] = 0$ . Da der Kommutator für Elemente aus  $p, q$  mit Elementen aus  $h$  nie in  $\mathfrak{h}$  liegen, ist  $\mathfrak{h}$  selbstnormal, d.h.  $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] = [x, \mathbb{R}h + \mathbb{R}z] \subseteq \mathfrak{h}\}$ .  $\square$

Um ganz praktisch Cartan Unteralgebren zu finden und zu charakterisieren, benutzt man sogenannte reguläre Elemente:

### Definition 1.4.

Nenne  $\text{rank } \mathfrak{g} := \min \{\dim \mathfrak{g}^0(\text{ad } x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$  den Rang von  $\mathfrak{g}$ .  $x \in \mathfrak{g}$  heißt *regulär* wenn  $\dim \mathfrak{g}^0(\text{ad } x) = \text{rank}(\mathfrak{g})$ . Schreibe  $\text{reg}(\mathfrak{g})$  für die Menge der regulären Elemente in  $\mathfrak{g}$ .

Für diese Elemente gelten die beiden wichtigen Theoreme

**Theorem 1.5.** • Für alle  $x \in \text{reg}(\mathfrak{g})$  ist  $\mathfrak{g}^0(\text{ad } x)$  eine Cartan Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ .

- Sei  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$  eine abelsche Unteralgebra für die alle Operatoren  $\text{ad } x, x \in \mathfrak{a}$  halbeinfach sind. Dann sind die Cartan Subalgebren des Zentralisators  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$  genau die Cartan Subalgebren von  $\mathfrak{g}$  mit  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ . Insbesondere existieren solche Cartan Subalgebren.

## 2 Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$

Die dreidimensionale Lie-Algebra zur speziellen linearen Gruppe,  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ , spielt in der Strukturtheorie der halbeinfachen Lie-Algebren mit aufspaltenden Cartan-Unteralgebren eine zentrale Rolle. Solche Lie-Algebren enthalten nicht nur eine Vielzahl von Lie-Unteralgebren die isomorph zur  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$  sind (cf. 5.3), sondern es stellt sich heraus, dass sie sogar aus solchen Unterhalbgebren generiert werden können (cf. 5.5). Daher hat die spezielle Untersuchung der Darstellungstheorie der  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$  eine weitreichende und allgemeine Bedeutung.

Die herausragende Eigenschaft der  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$  ist, dass ihre endlichen Darstellungen bzw. Moduln überschaubar und explizit bekannt sind:

**Satz 2.1** (Klassifikation einfacher  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -Module (5.2.6)).

Für ein jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es ein bis auf Isomorphie eindeutigen, einfachen  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -Modul der Dimension  $n$ .

Das recht einfache Beispiel für diese endlich-dimensionalen Darstellungen, an dem man alle wesentlichen Eigenschaften direkt ablesen kann, ist das folgende:

**Beispiel 2.2** (5.2.1).

Für ein  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist  $V := \mathbb{K}[Z, \frac{1}{Z}]$ , die Algebra der Laurent-Polynome, ein  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -Modul. Denn die Operatoren

$$E := \frac{d}{dZ}, F := -Z^2 \frac{d}{dZ} + \lambda Z, H := -2Z \frac{d}{dZ} + \lambda$$

auf  $V$  erfüllen gerade die Kommutatorrelationen eines geeigneten  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -Basistripels  $(h, e, f)$ , nämlich

$$[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$$

Man hat also eine Darstellung der  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$

$$\rho_\lambda : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \text{End}(V)$$

$$h \mapsto H, e \mapsto E, f \mapsto F$$

Aus der Wirkung von  $H, E, F$  auf die kanonische  $V$ -Basis  $\{Z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$H \cdot Z^n = (\lambda - 2n) Z^n, E \cdot Z^n = n Z^{n-1}, F \cdot Z^n = (\lambda - n) Z^{n+1}$$

sieht man, dass  $H$  diagonalisierbar ist, so dass  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{K} Z^n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\lambda-2n}(H)$ . Da  $E$  und  $F$  offensichtlich als Aufsteige- bzw Absteigeoperatoren wirken, findet man ein endlich-dimensionales Untermodul nur, wenn beide Operatoren für je ein Basiselement von  $V$  Null werden. Dies ist der Fall für  $\lambda \in \mathbb{N}_0$  mit dem  $\lambda + 1$ -dimensionalen Untermodul  $L(\lambda) := \text{span} \{1, \dots, Z^\lambda\}$ , welches selbst keine weiteren Untermodule hat und somit einfach ist.

Für den Beweis, dass nun jedes endlich dimensionale  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -Modul isomorph zu einem solchen  $L(\lambda)$  ist, verwendet man die auch für sich recht interessante

**Proposition 2.3** (5.2.4).

dass für ein endlich dimensionales  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -Modul  $V$  ein  $v_0 \in V$ , das  $e \cdot v_0 = 0$  und  $h \cdot v_0 = \lambda v_0$  erfüllt, ein Untermodul isomorph zu  $L(\lambda)$  generiert.

Dann muss man nur noch zeigen, dass sich solch ein  $v_0$  immer konstruieren lässt, wenn  $V$  einfach ist.

Für die Strukturtheorie halbeinfacher Lie-Algebren mit aufspaltender Cartan-Unteralgebra sind des Weiteren folgende Eigenschaften endlich-dimensionaler  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -Darstellungen  $(\rho, V)$  von Interesse:

- Proposition 2.4** (5.2.8). 1.  $\rho(h)$  ist diagonalisierbar und die Menge aller Eigenwerte  $\mathcal{P}_V \subset \mathbb{Z}$ .  
Außerdem  $\mathcal{P}_V = -\mathcal{P}_V$
2. Wenn  $\alpha, \alpha + 2k \in \mathcal{P}_V$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ , dann ist auch  $\alpha + 2j \in \mathcal{P}_V$  für alle  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Dass diese Eigenschaften gelten, wenn  $(\rho, V)$  irreduzibel ist, lässt sich direkt am obigen Beispiel  $L(\lambda)$  sehen. Die Verallgemeinerung auf beliebige endlich-dimensionale Darstellungen ist möglich, da wegen der Halbeinfachheit der  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$  nach dem Satz von Weyl solche Darstellungen zumindest vollständig reduzibel sind und damit aus irreduziblen zusammengesetzt. Auf diese lässt sich dann der Klassifikationssatz direkt anwenden.