Das Weyl'sche Theorem

Asar Hage-Ali

Endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebren über Körpern der Charakteristik Null, also insbesondere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, lassen sich als direkte Summen einfacher Lie-Algebren zerlegen. Durch dieses Strukturtheorem sind sie vollständig klassifiziert. Der Weyl'sche Satz zeigt nun, dass sogar endlich-dimensionale Darstellungen dieser Algebren zerlegbar sind in einfache Moduln.

Definition: Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über $\mathbb{K}$. $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $rad(\mathfrak{g}) = (0)$ gilt, das größte auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$ also trivial ist. $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, falls $\mathfrak{g}$ nicht-abelsch und ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist.

Definition: Sei β eine invariante (das heißt $\beta([x,y],z) = \beta(x,[y,z])$ für alle $x,y,z \in \mathfrak{g}$) symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform auf $\mathfrak{g}$, $x_1,\ldots,x_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und $x^1,\ldots,x^n$ die zugehörige duale Basis bezüglich β, d. h. $\beta(x_i,x^j) = \delta_{ij}$. Sei zudem ρ eine $\mathfrak{g}$-Darstellung. Dann heißt

$$\Omega(\beta,\rho) := \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\rho(x^i)$$

das zum Paar (β,ρ) gehörige *Casimir-Element*.

Diese Konstruktion erweist sich als äußerst hilfreich im Beweis des folgenden

Satz von Weyl: Jede endlich-dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist vollständig reduzibel, also eine direkte Summe einfacher $\mathfrak{g}$-Moduln. □

Bemerkung: Halbeinfache Lie-Algebren über $\mathbb{C}$ stehen in Bijektion zu kompakten einfach-zusammenhängenden Lie-Gruppen. Zwischen 1888 und 1894 wurde ein Großteil der Strukturtheorie von komplexen Lie-Algebren entwickelt, darunter fällt auch W. Killings Entdeckung des Radikals und halbeinfacher Lie-Algebren sowie die Einführung der Killing-Form in E. Cartans Doktorarbeit. Weyls Theorem von 1925 wurde ursprünglich durch Integration auf kompakten Lie-Gruppen bewiesen, 1935 fanden Casimir und van der Waerden einen algebraischen Beweis. Zu weiteren historischen Einzelheiten siehe auch N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Kapitel 2 und 3, Hermann, 1972, Paris.