- Naturwissenschaftliches Kolleg, Arbeitsgruppe 1: Lie-Gruppen -

Höchstgewicht-Darstellung

- nach Kaptiel 6.2 von Jonas Hirsch -

Die Hintergrundidee dieses Kapitels liefert Weyl's Theorem. Nach diesem ist jeder endlich dimensionale Modul einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auch halbeinfach. Damit reduziert sich eine mögliche Klassifikation auf die einfacher Moduln. In diesem Kapitel schränken wir uns auf den Fall einer zerfallenden halbeinfachen Lie-Algebra ein. Damit enthält die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine zerfallende Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$.
Im ersten Teil dieses Kapitels wird ein gewisses Gewicht, das sogenannte höchste Gewicht, ausgezeichnet und seine Eigenschaften analysiert. Im Zuge dessen ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Gewichten und Wurzeln.
Im zweiten Teil werden die entwickelten Strukturen genutzt, um eine Klassifikation durchzuführen. Sie besteht im Wesentlichen in einem Isomorphismus zwischen der Menge V der Gewichte und einer Teilmenge des $\mathbb{Z}^r$.
Entscheidend für die Beweise dieses Kapitels ist das $\mathfrak{sl}_2$-Theorem.

Bemerkung 1 (grundlegende Voraussetzungen). Sei von nun an $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra mit zerfallender Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$. V bezeichnet einen $\mathfrak{g}$-Modul.
Die üblichen Bezeichnungen für Gewichts- und Wurzelräume werden verwendet: $V_\lambda := \bigcap_{h\in\mathfrak{h}} \ker(h - \lambda(h)) \subseteq V$ ist ein Gewichtsraum und die zugehörige Menge aller $\mathfrak{h}$-Gewichte auf V ist $\mathcal{P}(V) := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : V_\lambda \neq \{0\}\}$.
Ebenso bezeichnet $\Delta := \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ das Wurzelsystem, das heißt die Menge aller Wurzeln $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ für die der Wurzelraum $\mathfrak{g}_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{h}) = \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{h}} \ker(\mathrm{ad}(h) - \alpha(h))$ nicht die Nullmenge ist.

Definition 6.2.2 (Standard Borel Unteralbegra)**.** *Sei $\Delta^+ \subseteq \Delta$ ein positives Wurzelsystem. Dann bezeichnet man Unteralgebren nach dem folgenden Typ*

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} + \sum_{\beta\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\beta \tag{1}$$

als standard Borel Unteralgebren. Da sie die nach der Form $\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{h}$ mit einer nilpotenten Lie-Algebra $\mathfrak{n}$ sind, folgt mit Proposition 5.5.1 ihre Auflösbarkeit.

Definition 6.2.3 (Höchstes Gewicht)**.** *Einen $\mathfrak{g}$-Modul V nennt man* Modul mit höchstem Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *falls er folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. $\exists v \in V \setminus \{0\}$*, so dass* $\mathbb{K}v$ $\mathfrak{b}$*-invariant ist*
2. $h \cdot v = \lambda(h)v \;\forall h \in \mathfrak{h}$
3. *v erzeugt den $\mathfrak{g}$-Modul V (d.h. V ist der kleinste Untermodul, der $\mathbb{K}v$ enthält).*

Dann nennt man λ höchstes Gewicht *und die nicht verschwindenden Elemente von $\mathbb{K}v$ heißen* Höchstgewichtsvektoren.

Nach der folgenden Präposition ist die obige Definiton sinnvoll, da ein solches Objekt existiert.

Proposition 6.2.4. *Jeder endlich dimensionale $\mathfrak{g}$-Modul ist ein höchster Gewichtsmodul.*

Sei nun $\Delta^+ = \{\beta_1, \dots \beta_m\}$ ein positives Wurzelsystem mit der Basis $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Zu jedem $\beta_i \in \Delta^+$ wird nach Theorem 5.3.4 ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel $(h_{\beta_i}, e_{\beta_i}, f_{\beta_i})$ fixiert:

$$\mu \prec \lambda :\Leftrightarrow \mu - \lambda \in \mathbb{N}_0[\Delta^+] := \sum_{\beta_i \in \Delta^+} \mathbb{N}_0 \beta_i$$

definiert eine partielle Ordnung auf dem Wurzelsystem. Mit diesen Konventionen beschreibt das folgende Theorem entscheidende Eigenschaften eines höchsten Gewichtsmoduls, wobei $\dim V < \infty$ nicht zwingend erfüllt sein muss.

Theorem 6.2.6. *Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul mit höchstem Gewicht λ und $0 \neq v \in V_\lambda$ ein Höchstgewichtsvektor, dann gilt:*

1. $V = span\{f_{\beta_1}^{i_1} \cdots f_{\beta_m}^{i_m} v : i_j \in \mathbb{N}_0$ *für* $j = 1, \dots, m\}$ *und* $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$
2. $\mathcal{P}(V) \subseteq \lambda - \mathbb{N}_0[\Delta^+]$
3. $\dim V_\mu < \infty \; \forall \mu \in \mathcal{P}(V)$
4. $\dim V_\lambda = 1$
5. *Jeder $\mathfrak{g}$-Untermodul von V ist die direkte Summe seiner Gewichtsräume.*
6. *V enthält genau einen maximalen echten $\mathfrak{g}$-Untermodul $V_{\max}$ und $V/V_{\max}$ ist der eindeutige, einfache Quotientenmodul von V.*
7. *jeder Quotientenmodul von V ungleich der 0 ist ein Höchstgewichtsmodul.*

Beweisidee. Der Beweis führt den ersten Teil auf das Poincaré-Birkoff-Witt Theorem (6.1.8) zurück. Die weiteren Teile folgen mit Hilfe von Lemma 5.2.3 und Theorem 5.4.13. □

Der anschließende Korollar und die Propostion enthalten für einen einfachen $\mathfrak{g}$-Modul V gewisse Eindeutigkeitsaussagen über die $\mathfrak{b}$-invariante Linie und den höchsten Gewichtsmodul an sich.

Korollar 6.2.7. *Falls V ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist, so enthält V genau eine $\mathfrak{b}$-invariante Linie.*

Proposition 6.2.8. *Zwei einfache $\mathfrak{g}$-Moduln mit gleichem höchsten Gewicht λ sind isomorph.*

Beweisideen. Beide Beweise werden auf die Punkte 2.,4. und 6. des vorherigen Theorems zurückgeführt. □

Die nächste Definition beinhaltet eine Konstruktion eines $\mathfrak{g}$-Moduls, der zu einem beliebigen, aber festen $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ein höchster Gewichtsmodul ist.

Definition 6.2.9 (Verma Moduln)**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h}$ eine zerfallende Cartan-Unteralgebra und $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} + \sum_{\beta\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\beta$ die Standard Borel Unteralgebra, die zum positiven Wurzelsystem $\Delta^+ \subseteq \Delta$ gehört.*
Jedes $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ kann auf $\mathfrak{b}^*$ erweitert werden, indem man $\lambda(\mathfrak{g}_\alpha) \equiv 0$ setzt für jedes $\alpha \in \Delta^+$. Offensichtlich gilt nun:

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \sum_{\beta\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathit{kern}\ \lambda$$

und damit ist $\lambda : \mathfrak{b} \to \mathbb{K} \cong \mathfrak{gl}_1(\mathbb{K})$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Nach der Definition der allgemeinen Einhüllenden Algebra lässt sich λ eindeutig zu einem Homomorphismus von Lie-Algebren $\lambda : \mathcal{U}(\mathfrak{b}) \to \mathbb{K}$ erweitern.

$$M(\lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g})/(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\{b - \lambda(b)\mathbf{1} : b \in \mathfrak{b}\} \tag{2}$$

ist damit wohldefiniert, wenn man den Quotient als die von dieser Menge erzeugten Untervektoraum von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ auffasst. Da $M(\lambda)$ ein Quotientenraum aus einem unter der natürlichen Wirkung (Linksmultiplikation) von $\mathfrak{g}$ auf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ invarianten Unterraum ist, trägt er eine natürliche $\mathfrak{g}$-Modul Struktur. Dieser Modul $M(\lambda)$ wird Verma Modul mit höchstem Gewicht λ genannt. Er ist ein höchster Gewichtsmodul, da

$$b \cdot [\mathbf{1}] = [b] = [\lambda(b)\mathbf{1}] = \lambda(b)[\mathbf{1}]$$

und

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot [\mathbf{1}] = [b] = [\mathcal{U}(\mathfrak{g})] = M(\lambda)$$

gilt. $L(\lambda) := M(\lambda)/M(\lambda)_{\max}$ ist nach Theorem 6.2.6 ein einfacher höchster Gewichtsmodul.

Definition 6.2.10 (ganzzahlige Gewichte)**.** *Sei Δ ein Wurzelsystem mit einer Basis Π, dann wird $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ als* ganzzahliges Gewicht *bezeichnet, falls*

$$\lambda(\check{\alpha}) \in \mathbb{Z} \text{ für } \alpha \in \Delta,$$

und damit gilt:

$$\begin{aligned} \Lambda = &\qquad \textit{Menge aller ganzzahligen Gewichte} \\ =_{\textit{Remark 5.4.18}} &\qquad \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : (\forall\alpha \in \Pi)\lambda(\check{\alpha}) \in \mathbb{Z}\} \\ \cong &\qquad \mathbb{Z}^r. \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *wird als* dominates ganzzahliges Gewicht *bezüglich eines positiven Wurzelsystems Δ^+ bezeichnet, falls*

$$\lambda(\check{\alpha}) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } \alpha \in \Delta^+.$$

Ebenso gilt nun:

$$\begin{aligned} \Lambda^+ = &\qquad \textit{Menge aller dominanten ganzzahligen Gewichte} \\ =_{\textit{Remark 5.4.18}} &\qquad \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : (\forall\alpha \in \Pi)\lambda(\check{\alpha}) \in \mathbb{N}_0\} \\ \cong &\qquad \mathbb{N}_0^r. \end{aligned}$$

Bemerkung 2. $W \subseteq GL(\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}})$ sei die Weyl-Gruppe des Wurzelsystems Δ, diese wird erzeugt durch

$$\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(\check{\alpha})\alpha. \tag{3}$$

Nach Theorem 5.4.17 (und Lemma 5.3.5) ist offensichtlich, dass Λ unter W invariant ist und dass zu jedem $\mu \in \Lambda$ ein $\sigma \in W$ existiert, so dass $\sigma(\mu) \in \Lambda^+$.

Nun werden die erhaltenen Strukturen im zweiten Teil dieses Kapitels verwendet, um eine Klassifikation der endlich dimensionalen einfachen Moduln durchzuführen. Das folgende Theorem enthält die entscheidende Aussage.

Theorem 6.2.15. *$\mathfrak{g}$ sei eine zerfallende halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{h}$ eine zerfallende Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Die Abbildung $\lambda \mapsto L(\lambda)$ (siehe Def. der Verma Moduln) ist eine Bijektion zwischen der Menge der dominaten ganzen Gewichte Λ^+ und der Menge der Isomorphismen-Klassen von endlich dimensionalen einfachen $\mathfrak{g}$-Moduln.*

Um dies beweisen zu können, sind noch einige Propositionen und Lemmata nötig.

Proposition 6.2.12. *Falls V ein endlich dimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul mit höchstem Gewicht λ ist, so ist λ ein dominates ganzes Gewicht.*

Lemma 6.2.13. *Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul und $W = W(\Delta)$ die Weyl Gruppe von Δ. Falls für jedes $\alpha \in \Pi$ einer Basis des Wurzelsystems, V die Vereinigung endlich dimensionaler Untermoduln ist, nennt man V lokal endlicher $\mathfrak{g}(\alpha)$-Modul. Außerdem gilt für jedes Gewicht μ von V und jedes $\sigma \in W$ die Relation:*

$$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma(\mu)}. \tag{4}$$

Beweisidee. Beide Beweise werden mittels des $\mathfrak{sl}_2$- Theorems auf schon bekannte Strukturen zurückgeführt, die somi auch auf ganz V gelten müssen. □

Das entscheidende Mittel für den Beweis des obigen Theorems enthält die folgende Propostion:

Proposition 6.2.14. *$\mathfrak{g}$ sei eine halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{h}$ eine zerfallende Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Falls $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ein dominantes ganzes Gewicht bezüglich Δ^+ ist, so ist der einfache Höchstgewichtsmodul $V := L(\lambda)$ mit höchstem Gewicht λ endlich dimensional.*

Beweisidee. Man betrachtet ein fixiertes $\alpha \in \Pi$ und zeigt dann, dass ein endlich dimensionaler $\mathfrak{g}(\alpha)$-Modul als Teilmenge von V existiert und damit ist $V_\alpha^{'}$ als Menge aller endlich dimensionalen $\mathfrak{g}(\alpha)$-Moduln nicht die Nullmenge. Weiter kann man dann folgern, dass $V_\alpha^{'}$ schon ganz V ist.
Nun lässt sich das obige Lemma 6.2.13 und die W-Invarianz von $\mathcal{P}(V)$ anwenden und damit gilt $\dim V_\mu < \infty$ für jedes Gewicht μ von V.
Die partielle Ordnung auf dem Wurzelsystem und $\mathcal{P}(V) \subseteq W(\{\mu \in \Lambda^+ : \mu \prec \lambda\})$ impliziert, dass die Menge aller Wurzeln endlich ist. Nach Theorem 6.2.6 ist V die direkte Summe der Gewichtsräume, die nun eine endliche Summe über endlich dimensionale Gewichsträume ist. □

Beweisidee des Theorems 6.2.15. Das Theorem folgt nun aus den Propositionen und Lemmata. □