

Wurzelzerlegung halbeinfacher Lie-Algebren

Norman Metzner, Peter Herbrich

Dieser Vortrag wendet die zuvor vorgestellte Technik der Wurzelzerlegung auf halbeinfache Lie-Algebren an. Es stellt sich heraus, dass diese für halbeinfache Lie-Algebren viele schöne und nützliche Resultate liefert, die die "Feinstruktur" der Lie-Algebren genauer bestimmen. Insbesondere kommen dabei auch die Resultate über die Darstellungstheorie der $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ zum Einsatz.

Zur Erinnerung: Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt *halbeinfach*, falls ihr maximales auflösbares Ideal $\text{rad}(\mathfrak{g})$ das Nullideal $\{0\}$ ist. Für eine Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} , d.h. \mathfrak{h} ist nilpotent und selbstnormalisierend oder äquivalent $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, liefert die adjungierte Darstellung $\text{ad} : \mathfrak{h} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$ eine Wurzelraumzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \quad \text{mit} \quad [\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subseteq \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}.$$

Dabei war die definierende Eigenschaft der (verallgemeinerten) Wurzelräume

$$\text{ad } h(x) = \lambda(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}_\lambda$$

$$(\text{bzw. } x \in \mathfrak{g}^\lambda \iff (\text{ad } h - \lambda(h))^n(x) = 0 \text{ für ein } n \text{ und alle } h \in \mathfrak{h}).$$

Sei nun \mathfrak{g} immer eine halbeinfache Lie-Algebra und \mathfrak{h} eine aufspaltende Cartan-Unteralgebra von \mathfrak{g} , dann kann man zuerst feststellen, dass die Killing-Form die spezielle Gestalt $\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h') = \sum_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} m_\lambda \lambda(h) \lambda(h')$ mit $m_\lambda := \dim \mathfrak{g}^\lambda$, $h, h' \in \mathfrak{h}$ hat und dass für $\lambda + \mu \neq 0$ gilt $\mathfrak{g}^\lambda \perp \mathfrak{g}^\mu$ bzgl. κ . Aus der Nichtentartetheit der Killing-Form (Cartan's Kriterium für Halbeinfachheit) folgt unmittelbar

$$\kappa(x, \mathfrak{g}^{-\alpha}) = \{0\} \Rightarrow x = 0 \quad \text{und} \quad \kappa(\mathfrak{g}^\alpha, y) = \{0\} \Rightarrow y = 0.$$

Insbesondere gilt $m_\alpha = m_{-\alpha}$ und $\kappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ ist nichtentartet, d.h. κ induziert eine nichtentartete Paarung von \mathfrak{g}^α und $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. Zudem ist \mathfrak{h} abelsch und $\text{ad } \mathfrak{h}$ besteht aus diagonalisierbaren Elementen, womit $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ für alle Wurzeln α folgt. Außerdem spannen die Wurzeln den gesamten Dualraum von \mathfrak{h} auf, $\text{span}_{\mathbb{C}} \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^*$.

Dieses Resultat erlaubt es uns, wie aus der linearen Algebra bekannt, zu jeder Wurzel α ein eindeutiges $h'_\alpha \in \mathfrak{h}$ durch

$$\kappa(h, h'_\alpha) = \alpha(h)$$

zu definieren und damit einher geht eine durch

$$(\alpha, \beta) := \kappa(h'_\alpha, h'_\beta) = \alpha(h'_\beta) = \beta(h'_\alpha), \quad \alpha, \beta \in \Delta,$$

induzierte Bilinearform auf dem Dualraum von \mathfrak{h} .

Nach einem kleinen technischen Lemma folgt auch schon das zentrale Theorem. Es ist Ausgangspunkt für die vollständige Klassifikation von einfachen Lie-Algebren und bringt die besondere Rolle der $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ zum Ausdruck.

Theorem 1 (\mathfrak{sl}_2 -Theorem). *Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra, \mathfrak{h} eine aufspaltende Cartan-Unteralgebra von \mathfrak{g} und $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, dann gilt:*

(i) $(\alpha, \alpha) \neq 0$ und es gibt Elemente $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$, sodass

$$[h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, [h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha, [e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha;$$

insbesondere ist die Unteralgebra $\mathfrak{g}(\alpha) := \text{span}_{\mathbb{C}}\{h_\alpha, e_\alpha, f_\alpha\}$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

(ii) $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}])$ und $\mathbb{Z}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\}$.

Wir sehen also, dass α auf $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ nicht verschwindet und können aus diesem Grund die sogenannte *Kowurzel* definieren:

$$\check{\alpha} = h_\alpha = 2 \frac{h'_\alpha}{\alpha(h'_\alpha)} \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \quad \text{mit} \quad \alpha(\check{\alpha}) = 2.$$

Die Eindeutigkeit der Definition folgt aus $\dim([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) = 1$.

Das nun folgende Lemma nutzt vor allem die Resultate der Darstellungstheorie für die $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ aus. Die wohl wichtigste Aussage dieses sogenannten *Root String Lemmas* ist, dass für alle $\alpha \in \Delta, \beta \in \Delta \setminus \{\pm\alpha\}$ die Menge $\{k \in \mathbb{Z} : \beta + k\alpha \in \Delta\}$ ein Intervall in \mathbb{Z} ist. Hat dieses die Form $[-p, q] \cap \mathbb{Z}$ für $p, q \in \mathbb{Z}$, dann gilt außerdem $p - q = \beta(\check{\alpha})$; insbesondere haben wir damit $p, q > 0$, da $\beta \in \Delta$. Eine Folgerung hieraus ist $\alpha \in \Delta \Rightarrow \mathbb{K}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\}$.

Das motivierende Beispiel für das folgende Kapitel über abstrakte Wurzelsysteme ist der reelle Unterraum $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{\check{\alpha} : \alpha \in \Delta\}$. Er hat die Eigenschaften:

- (i) $\alpha(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R} \quad \forall \alpha \in \Delta$;
- (ii) κ ist positiv definit auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$;
- (iii) $\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$;
- (iv) $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}$.

Zum Abschluss sei ein Beispiel betrachtet, die spezielle lineare Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : \text{tr } x = 0\}.$$

Die Diagonalmatrizen \mathfrak{h} bilden eine abelsche Unteralgebra von \mathfrak{g} , damit ist sie nilpotent, das heißt, wir können die Gewichte von \mathfrak{g} bzgl. \mathfrak{h} ausrechnen. Für E_{ij} gilt $[\text{diag}(h_1, \dots, h_n), E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij}$, woraus wir erkennen, dass $\mathbb{K}E_{ij}$ ein eindimensionaler Wurzelraum zur Wurzel $\epsilon_i - \epsilon_j$ ist. Die Funktionale sind definiert durch $\epsilon_i(\text{diag}(h_1, \dots, h_n)) := h_i$. Wir erhalten für das Wurzelsystem

$$A_{n-1} := \{\epsilon_i - \epsilon_j : 1 \leq j \neq k \leq n\}.$$

Mit Hilfe eines zuvor betrachteten Lemmas lässt sich außerdem die Halbeinfachheit von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ zeigen ebenso wie die Eigenschaft von \mathfrak{h} , eine Cartan-Unteralgebra zu sein.