1 Paralleltransport

Disclaimer: Im folgenden wird aus Gründen der Übersichtlichkeit an einigen Stellen Summenkonvention benutzt, d.h. über gleiche Indizes, die einmal hochgestellt und einmal tiefgestellt auftauchen, wird summiert.

Erinnerung: Am Ende von Normans Vortrag wurde erläutert, wie ein Zusammenhang in einem HFB eine kovariante Ableitung im assoziierten VB induziert. Dieser Ball soll zunächst formal aufgegriffen werden:

Definition: *Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel über M. Eine kovariante Ableitung in (E, π, M) ist eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

mit folgenden zwei Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \nabla_X fs &= X(f) \cdot s + f \cdot \nabla_X s && \forall f \in C^\infty(M),\ X \in \Gamma(TM),\ s \in \Gamma(E) \\ \nabla_{fX} s &= f \cdot \nabla_X s && \forall f \in C^\infty(M),\ X \in \Gamma(TM),\ s \in \Gamma(E). \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Der Raum aller Zusammenhänge in E ist ein affiner Raum über $\Lambda^1(M, End(E))$ (ÜA).
- Setzen wir $\nabla_X f := X(f)$, so können wir ∇ zu einer typerhaltenden kovarianten Ableitung im Tensorbündel zu E fortsetzen mittels

  $$\nabla_X(A \otimes B) = (\nabla_X A) \otimes B + A \otimes \nabla_X B$$

  sowie Verträglichkeit mit allen Kontraktionen, d.h. ibs. für $\alpha \in \Gamma(E^*)$, $\psi \in \Gamma(E)$:

  $$(\nabla_X \alpha)(\psi) = \nabla_X(\alpha(\psi)) - \alpha(\nabla_X \psi).$$

- Sei $e_1, ..., e_n$, $e'_1, ..., e'_n$ lokale Rahmen über $U \subset M$. Sei $s = s^i e_i$ und sei ρ der Rahmenwechsel so dass $e'_j = \rho^k_j e_k$. Wir können dann schreiben: $\nabla_X s = X(s^i)e_i + s^i A^j_i(X) e_j$, wobei $A = (A^j_i)_{ij}$ eine matrixwertige 1-Form auf M ist und den lokalen Ausdruck der kovarianten Ableitung bezüglich des Rahmens $e_1, ...e_n$ darstellt. Man rechnet nach (ÜA), dass sich bezüglich des Rahmens $e'_1, ..., e'_n$ folgendes Transformationsverhalten ergibt:

  $$A' = \rho^{-1} d\rho + \rho^{-1} A \rho.$$

  Mit der (gleichlautenden) Transformationsformel für die lokalen Zusammenhangsformen im HFB-Kalkül aus Normans Vortrag haben wir damit gezeigt:

Theorem: *Zu jeder kovarianten Ableitungen in einem Vektorbündel E gibt es genau einen Zusammenhang im zugehörigen Rahmenbündel.*

Im folgenden werden die Begriffe Zusammenhang und kovariante Ableitung auf Grund des obigen Theorems synonym gebraucht.

Wegen der Tensorialität im $\Gamma(M)$-Argument hängt die kovariante Ableitung in Richtung von $X \in \Gamma(TM)$ an der Stelle x nur von X_x ab. Dies erlaubt

Definition: *Sei $\gamma : [0,1] \to M$ eine Kurve. Dann heißt $\nabla_{\dot{\gamma}} s : [0,1] \to E_{\gamma(t)}$ kovariante Ableitung von s längs γ.*

Definition und Lemma: *Sei γ ein Weg in M mit Startpunkt $\gamma(0) = x$ und ∇ eine kovariante Ableitung in E. Dann gibt es zu jedem $v \in E_{\gamma(0)}$ genau einen Schnitt $s \in \Gamma(\gamma^* E)$ mit $s(\gamma(0)) = v$ und $\nabla_{\dot{\gamma}} s = 0$.*

Beweis: Lokal schreibt sich $\nabla_{\dot{\gamma}} s$ bezüglich eines Rahmens $(e_1, ..., e_n)$ mit $s = s^i e_i$ als

$$\nabla_{\dot{\gamma}} s = \sum_{i=1}^{rk(E)} (\frac{ds^i}{dt} + \sum_{j=1}^{rk(E)} s^j A^i_j(\dot{\gamma}))e_i \overset{!}{=} 0.$$

Dies ist ein lineares System von ODEs, so dass es eine eindeutige Lösung $s = s(t) = s(\gamma(t))$ zu vorgegebener Anfangsbedingung gibt. Wir definieren nur den Paralleltransport längs γ als die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma,\nabla,t} : E_{\gamma(0)} &\to E_{\gamma(t)} \\ v &\mapsto s_v(\gamma(t)), \end{aligned}$$

wobei s_v der zur Anfangsbedingung v gehörende parallele Schnitt sei. τ ist linear, da das definierende System von ODEs linear ist, und invertierbar durch den Paralleltransport längs des rückwärts durchlaufenen Weges γ. Im allgmeinen ist τ wegabhängig.

Wir können nun die kovariante Ableitung durch den Paralleltransport ausdrücken:

Satz: *Sei $\gamma : [0,1] \to M$ ein stückweise glatter Weg in M mit $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}\ (0) = X_x$. Dann gilt:*

$$\nabla_{X_x} s = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\tau_{\gamma,\nabla,h}(s_{\gamma(h)}) - s_x).$$

Beweis: Seien V_i, $i = 1, ..., rk(E)$ parallele Vektorfelder längs γ, die bei $x = \gamma(0)$ (und damit überall) linear unabhängig sind. Dann können wir schreiben $s(\gamma(t)) = s^j(t)V_j(t)$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\tau_{\gamma,\nabla,h}(s_{\gamma(h)}) - s_x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\tau_{\gamma,\nabla,h}(s^j(h)V_j(h)) - (s^j(0)V_j(0))) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((s^j(h) - s^j(0))V_j(0)) \\
&= \frac{ds^j}{dt}(0)V_j(0) \\
&= \nabla_{\dot\gamma(0)}(s^j V_j) \\
&= \nabla_{X_x} Y.
\end{aligned}$$

Bemerkung:

- Der gerade bewiesene Satz zeigt, dass der Paralelltransport gerade das integrierte Datum im Verhältnis zum infinitesimalen Datum der kovarianten Ableitung darstellt.
- Man kann auch im HFB-Kalkül einen Paralleltransport definieren: Analog zum VB-Kalkül zeigt man, dass es zu jedem Weg auf der Basismannigfaltigkeit M zu vorgegebener Anfangsbedingung genau einen Lift in P gibt, so dass die Tangentialvektoren zu allen Zeiten horizontal sind. Dies definiert eine Abbildung zwischen den Fasern über $\gamma(0)$ und $\gamma(t)$. Überträgt man diese Abbildung auf ein assoziiertes Bündel und betrachtet dort die zugehörige kovariante Ableitung, so ergibt sich exakt dieselbe Formel wie im vorhergegangenen Satz, was wiederum die Äquivalenz der beiden Konzepte zeigt. Für Details zum HFB-Paralleltransport siehe **[KN63]**.

2 Riemannsche Geometrie

Sei im folgenden stets $L(M)$ das Rahmenbündel von M. Jeder Punkt $p \in L(M)$ mit $\pi(p) = x$ definiert eine Basis des Tangentialraumes von M im Punkt x und damit einen Isomorphismus $p : \mathbb{R}^n \to T_xM$. Wir können nun eine $\mathbb{R}^n$-wertige 1-Form auf P definieren vermittels

$$\Theta(X) := p^{-1}.(d\pi(X)).$$

Θ heißt Fundamentalform auf P. Als Übungsaufgabe kann man zeigen, dass Θ für einen beliebigen Zusammenhang in $L(M)$ horizontal und vom Typ $GL_n(\mathbb{R})$ bezüglich der Standardwirkung von $GL_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^n$ ist. Diese Eigenschaft überträgt sich nun nach Wahl eines Zusammenhanges auf die kovariante Ableitung $\tilde{T} := D\Theta$, welche als Torsionsform bezeichnet wird. Völlig analog hatten wird aus der Zusammenhangsform, welche horizontal und von Typ Ad ist, die Krümmungsform $F = D\theta$ erhalten. Wir können nun beide Formen auf das assoziierte Tangentialbündel übertragen mittels

$$\begin{aligned}
T(X,Y) :=& \iota_p(\tilde{T}(X^*, Y^*)) \\
R(X,Y)Z :=& \iota_p(F(X^*, Y^*)(p^{-1}.Z)),
\end{aligned}$$

wobei $X, Y, Z \in T_xM$, $p \in P$ mit $\pi(p) = x$ und X^*, Y^* seien beliebige Lifts von X, Y in T_pP (z.B. die horizontalen Lifts). Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Punktes p in der Faser über x (ÜA). Es gilt ferner:

Lemma:

$$\begin{aligned} T(X,Y) =& \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ R(X,Y)Z =& \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \end{aligned}$$

Für einen Beweis siehe z.B. **[KN63]**.

Es ist eine naheliegende Bedingung an einen Zusammenhang, wenn man fordert, dass $T = 0$. Ein solcher Zusammenhang heißt torsionsfrei. Auf einer (Pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) erhalten wir als eine weitere natürliche Bedingung an einen Zusammenhang, dass die Metrik g parallel sein soll, d.h. $\nabla_g = 0$ oder explizit (vgl. Kontraktionsverträglichkeit):

$$\nabla_X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Wir nennen einen solchen Zusammenhang metrisch. Es gilt nun der folgende

Fundamentalsatz der Riemannschen Geometrie: *Sei (M, g) eine (Pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf (M, g) genau einen metrischen, torsionsfreien Zusammenhang ∇. ∇ heißt Levi-Civita-Zusammenhang und genügt der Koszul-Formel:*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) =& Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ & - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]). \end{aligned}$$

Ein Beweis dieses Theorems findet sich in nahezu jedem Lehrbuch der Differentialgeometrie. Es ist zu zeigen, dass die Koszul-Formel tatsächlich einen metrischen, torsionsfreien Zusammenhang definiert und dass umgekehrt jeder metrische, torsionsfreie Zusammenhang notwendig die Kozsul-Identität erfüllt. Wer den Umgang mit den eingeführten Begriffen trainieren will, kann den Fundamentalsatz auch als ÜA zeigen, da keinerlei tiefere Tricks eingehen.

3 Holonomie

Nahezu alle in diesem Abschnitt erwähnten Resultate finden sich mit Beweis in **[KN63]**. Ich werde daher nur Beweisideen angeben und auf die entsprechenden Stellen verweisen.

Sei $P(M, G)$ ein Hauptfaserbündel, θ ein Zusammenhang in P und $x \in M$. Sei $C(x)$ der Raum aller stückweise glatten geschlossenen Wege in M mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Jeder solche Weg γ induziert via horizontalem Lift einen Isomorphismus

$$\tau_{\theta,\gamma,1} : P_x \cong G \to P_x \cong G.$$

Definition: *Wir definieren die Holonomiegruppe über dem Punkt x als*

$$Hol(x) := \{\tau_{\theta,\gamma,1} : \gamma \in C(x)\}.$$

Die eingeschränkte Holonomiegruppe zum Punkt x ist definiert als

$$Hol(x) := \{\tau_{\theta,\gamma,1} : \gamma \in C(x), \gamma \text{ nullhomotop}\}.$$

Im folgenden betrachten wir den Zusammenhang als fixiert und lassen ihn in der Notation weg. Sei nun $p \in P_x$. Dann gilt $\tau_{\gamma,1}(p) = \sigma_g(p)$ für ein $g \in G$. Wir schreiben $Hol(p)$ für die Gruppe aller solcher g.

Lemma: (Vgl. [KN63], Prop. 4.1) $Hol(p) \cong Hol(\pi(p))$ *und alle Holonomiegruppen sind zueinander konjugiert, also insbesondere isomorph.*

Beweis: Folgt ziemlich direkt aus den Definitionen, siehe Quelle oder ÜA.

Theorem: (Vgl. [KN63], Thm. 4.2) $Hol_0(p)$ *ist normal in* $Hol(p)$ *mit höchstens abzählbarem Index.* $Hol_0(p)$ *ist zshg. Unterliegruppe der Strukturgruppe G.*

Beweisidee: Für den zweiten Teil wähle einen Weg Homotopie zwischen dem induzierenden Weg in M und dem konstanten Weg und lifte diese horizontal. Dies zeigt, dass $Hol_0(p)$ bogenzusammenhängend ist, so dass die Behauptung aus dem Satz von Yamabe folgt. Die Normalität von $Hol_0(p)$ in $Hol(p)$ folgt nahezu unmittelbar aus der Definition. Die Indexbehauptung schließlich ergibt sich aus der Abzählbarkeit der Fundamentalgruppe.

Definition: *Sei $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ ein Morphismus von Hauptfaserbündeln. f heißt Reduktion der Strukturgruppe, falls*

- $f : P' \to P$ *eine injektive Immersion ist.*
- $\lambda : G' \to G$ *eine injektive Immersion ist.*
- $M = M'$ *und* $\tilde{f} : M' \to M$ *die Identität ist.*

Da wir uns für Hauptfaserbündel mit Zusatzstruktur (Zusammenhang) interessieren, lautet nun die zentrale Frage: Wann ist eine Bündelreduktion verträglich mit einem Zusammenhang?

Satz: (Vgl. [KN63], Prop. 6.1) *Sei $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ ein Morphismus von Hauptfaserbündeln, so dass $\tilde{f} : M' \to M$ ein Diffeomorphismus ist. Sei Γ' ein Zusammenhang in P'. Dann existiert genau ein Zusammenhang Γ in P, so dass $df : H'_{p'} \xrightarrow{\sim} H_{f(p')}$.*

Beweisidee: Es gibt nur einen möglichen Ansatz und der funktioniert.

Ist f in diesem Kontext eine Bündelreduktion, so heißt Γ' reduzierter Zusammenhang zu Γ. Ist umgekehrt Γ ein Zusammenhang in P, so heißt Γ reduzierbar zu einem Zusammenhang Γ' in P', falls Γ durch eine Bündelreduktion $f : P' \to P$ von Γ' induziert wird.

Definition: *Sei M zusammenhängend, $P(M,G)$ ein HFB mit Zusammenhang Γ. Wir schreiben $p \sim_\Gamma q$, falls p durch einen horizontalen Weg mit q verbindbar ist. Dann heiß $P(p) := \{q \in P : p \sim_\Gamma q\}$ das Holonomiebündel von P durch p.*

Reduktionssatz: (Vgl. [KN63], Thm. 7.1) *$P(p)$ ist eine Bündelreduktion von P zur Strukturgruppe $Hol(p)$ und Γ ist reduzierbar zu einem Zusammenhang in $P(p)$.*

Beweisidee: Der entscheidende Punkt liegt darin, dass sich lokal um jeden Punkt $x \in M$ mittels Paralleltransport Schnitte von P konstruieren lassen, deren Werte in $P(p)$ liegen. Der Rest ist Technik.

Bemerkung: Das Holonomiebündel weist Analogien zur Überlagerungstheorie auf: Eine Überlagerung teilt in einen trivialen Teil und einen „interessanten Teil“, genau so zerlegt sich das Hauptfaserbündel disjunkt in die einzelnen Holonomiebündel, welche den „interessanten“ Teil bilden. Man beachte ferner, dass die Theorie der Hauptfaserbündel im Falle von 0-dimensionaler, d.h. diskreter Strukturgruppe gerade in die Überlagerungstheorie übergeht.

Die abschließenden zwei Sätze sollen Wege aufweisen, wie es zumindest prinzipiell möglich ist, die Holonomiegruppe einer Mannigfaltigkeit zu berechnen und/oder aus ihrer Kenntnis weitere Folgerungen über geometrische Strukturen auf der Mannigfaltigkeit zu ziehen.

Satz von Ambrose-Singer: (Vgl. [KN63], Thm. 8.1) *Sei $P(M,G)$ ein HFB, Γ ein Zusammenhang in P mit Krümmungsform F und $p \in P$. Dann gilt:*

$$\mathfrak{hol}(p) = span\{F_q(X,Y) : q \in P(p),\, X,Y \in H_q\} \subset \mathfrak{g}.$$

Beweisidee: ObdA $P = P(p)$. Schreibe $\mathfrak{g}' := span\{F_q(X,Y) : q \in \mathrm{P},\, X,Y \in H_q\}$. Man zeigt, dass

$$q \mapsto H_q \oplus \mathfrak{g}'_p$$

eine involutive Ditribution von voller Dimension ist und die nach Frobenius existierende Integralmannigfaltigkeit bereits ganz P ist. Daraus folgt $\dim\mathfrak{g}' = \dim\mathfrak{g}$ und damit $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Bemerkung: Der Satz von Ambrose-Singer zeigt, dass, ähnlich wie bei der Korrespondenz zwischen Zusammenhang und Paralleltransport, die Holonomie das integrale Konzept ist, welches zum infinitesimalen Konzept der Krümmung korrespondiert.

Theorem: Holonomie-Prinzip (Vgl. [Jo07], Prop 2.5.2) *Sei M zusammenhängend, ∇ ein Zusammenhang in TM bzw. Γ ein Zusammenhang in $L(M)$. Sei $x \in M$ und $S \in \Gamma(E)$ ein Schnitt, wobei $E = TM^{\otimes^k} \otimes T^*M^{\otimes^l}$ ein Tensorbündel über TM ist. Dann gilt: Ist $\nabla S = 0$, so wird S_x von $Hol(x)$ invariant gelassen. Ist umgekehrt $\tilde{S}_x \in E_x$ invariant unter der Wirkung von $Hol(x)$, so existiert genau ein Schnitt $S \in \Gamma(E)$, so dass $\nabla S = 0$ und $S_x = \tilde{S}_x$.*

Beweisskizze: Sei zunächst $\nabla S = 0$. Dann ist auch $\gamma^* S$ parallel längs γ für beliebige geschlossene Wege. Somit lässt der Paralleltransport längs geschlossener Wege S_x invariant. Sei umgekehrt $\tilde{S}_x$ Holonomie-invariant. Dann ist der Paralleltransport von $\tilde{S}_x$ wegunabhängig und wir können somit $\tilde{S}_x$ mittels Paralleltransport längs beliebiger Wege zu einem parallelen Schnitt S auf ganz M fortsetzen.

4 Quellen

[Jo07] Dominic Joyce, *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 12, Oxford University Press, Oxford, 2007, 2007

[KN63] S. Kobayashi und K. Nomizu, *Foundations of differential geometry I*, Wiley Classics Library, Wiley Inc., Princeton, 1963, 1991.