Topologien auf Endomorphismenräumen

Asar Hage-Ali

Folgende Zusammenfassung soll das Verständnis des Artikels [Ms63] (siehe Basar) erleichtern.

Wir betrachten einen lokal-konvexen $\mathbb{R}$-Vektorraum E, dessen Topologie durch eine Basis von absolutkonvexen Nullumgebungen $\mathcal{W}$ bzw. durch die zugehörige Familie von Halbnormen $(p_W)_{W \in \mathcal{W}}$ erzeugt wird, desweiteren den Raum der stetigen Endomorphismen $\mathcal{L}(E)$, versehen mit einer von einer Nullumgebungsbasis $\mathcal{V}$ erzeugten lokal-konvexen Topologie.

Definition: *Eine Menge $M \subset E$ heißt beschränkt, falls*

$$\forall W \in \mathcal{W} \exists \alpha_W \in \mathbb{R}_+ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > \alpha_W : M \subset \lambda W.$$

Hilfslemma 1: *Für eine Menge $M \subset E$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) M ist beschränkt.
(2) $\forall N \subset M : N$ ist beschränkt.
(3) Der Abschluss $\overline{M}$ ist beschränkt.
(4) $\forall W \in \mathcal{W} : sup_{m \in M}\{p_W(m)\} < \infty$.
(5) $\forall f \in E' : f(M) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Beweis: *(5)⇒(1)* Ist M unbeschränkt, so existiert nach *(4)* eine Halbnorm p_W mit $sup_{m \in M}\{p_W(m)\} = \infty$. Im mit der von p_W induzierten Normtopologie versehenen Vektorraum $V := E \diagup N_{p_W}$ ist das Bild von M unter der stetigen Projektion $\pi_W : E \to V$ unbeschränkt. Die Punkte von $\pi_W(M)$ als Elemente des Biduals V'' betrachtend, existiert nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit von Banach-Steinhaus ein lineares stetiges Funktional $\overline{f} \in V'$ mit $\overline{f}(\pi_W(M) \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt. Dann ist $f := \overline{f} \circ \pi_W$ ein lineares stetiges Funktional auf E mit $f(M) \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt. □

Hilfslemma 2: *Gibt es eine beschränkte Nullumgebung $W \in \mathcal{W}$, so ist die lokal-konvexe Topologie von E bereits durch eine einzige Halbnorm gegeben.*

Beweis: Die Bedingung der Beschränktheit von W, nämlich

$$\forall W' \in \mathcal{W} \exists \alpha_{W'} \in \mathbb{R}_+ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > \alpha_{W'} : W \subset \lambda W',$$

zeigt, dass das Minkwoskifunktional p_W mit $p_W(e) = inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ | e \in \lambda W\}$ eine Topologie erzeugt, die feiner ist als die lokal-konvexe Topologie von E. □

[Ms63] Maissen, B.:Über Topologien im Endomorphismenraum eines topologischen Vektorraumes, Math. Ann. 151,283-285 (1963)