

Die Jordan-Zerlegung

Alexandra Kruscha

6. Mai 2008

Die Jordan-Zerlegung eines Endomorphismus' stellt ein wichtiges Werkzeug für die Strukturanalyse von Lie-Algebren dar. Die Hauptaussage dabei ist, dass man jeden Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums eindeutig in eine diagonalisierbare (bzw. im reellen Fall halbeinfache) und eine nilpotente Komponente zerlegen kann:

Satz: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $M \in \text{End}(V)$, wobei M zerfallend sei (Charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren). Dann existieren ein diagonalisierbarer Endomorphismus M_s , und ein nilpotenter End. M_n , sodass:

$$M = \underbrace{M_s}_{\substack{\text{diagonalisierbare} \\ \text{Jordankomponente}}} + \underbrace{M_n}_{\substack{\text{nilpotente} \\ \text{Jordankomponente}}}$$

Dabei lassen sich M_s und M_n als Polynome von M darstellen und die Eigenräume von M_s sind mit den verallgemeinerten Eigenräumen von M identisch. Die Jordan-Zerlegung ist dadurch eindeutig charakterisiert, dass die erste Komponente diagonalisierbar, die zweite nilpotent ist und dass beide Komponenten miteinander kommutieren.

Für den Beweis dieses Satzes haben wir zunächst Polynome aus dem Minimalpolynom von M und damit Projektoren auf die verallgemeinerten Eigenräume von M konstruiert. Eine geeignete Linearkombination dieser Projektoren ergeben dann schließlich M_s und M_n .

Aus diesem Beweis erkennt man, dass sich viele Eigenschaften von M auf seine Jordan-Komponenten vererbt werden. So gilt z.B.:

- jeder Endomorphismus, der mit M vertauscht, kommutiert auch mit M_s und M_n
- ist W ein M -invarianter Unterraum von V , so ist W auch invariant unter M_s und M_n

Weiterhin gilt für die adjungierte Darstellung ad einer Lie-Algebra \mathfrak{g} lautet die Jordanzerlegung von $\text{ad}(x)$ für jedes $x \in \mathfrak{g}$:

$$\text{ad}(x) = \text{ad}(x_s) + \text{ad}(x_n)$$

Zur Erinnerung:

- Für $\lambda \in \mathbb{K}$ definiert man:
den **Eigenraum** bezüglich λ : $V_\lambda(M) := \ker(M - \lambda \mathbf{1})$
- $M \in \text{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, falls $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda(M)$
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt M **halbeinfach**, falls $M_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$ diagonalisierbar. Dabei gilt: $(M_{\mathbb{C}}(z \otimes v) = z \otimes Mv)$
- M heißt **nilpotent**: $\exists n \in \mathbb{N}$ existiert : $M^n = 0$