

NICHT ABGESCHLOSSENE UNTERGRUPPEN

FLORIAN KLEIN, PETER HERBRICH

INHALTSVERZEICHNIS

1. Abgeschlossene Untergruppen	1
2. Integrale Untergruppen	2
3. Wegzusammenhängende Untergruppen	3
4. Initiale Untergruppen	9

1. ABGESCHLOSSENE UNTERGRUPPEN

Was zeichnet Lie-Gruppen aus?

Es ist das Zusammenspiel von Gruppenstruktur, Topologie und differenzieller Struktur.

Satz (Abgeschlossene Untergruppen). *Abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind selbst Lie-Gruppen.*

Topologie + Gruppenstruktur \rightarrow Differenzielle Struktur

Proposition. *Eine Untergruppe einer Lie-Gruppe ist selbst eine Lie-Gruppe bezüglich der Teilraumtopologie genau dann, wenn sie abgeschlossen ist.*

Ist die Story damit zu Ende?

2. INTEGRALE UNTERGRUPPEN

Hatten gesehen: G Lie-Gruppe $\Rightarrow \exists$ konvexe 0-Umgebung $V \subseteq \mathbf{L}(G)$, so dass $\forall x, y \in V$ die Dynkin-Reihe

$$x * y = x + \sum_{\substack{k, m \geq 0 \\ p_i + q_i > 0}} \frac{(-1)^k}{(k+1)(q_1 + \dots + q_k + 1)} \frac{(ad x)^{p_1} (ad y)^{q_1} \dots (ad x)^{p_k} (ad y)^{q_k} (ad x)^m}{p_1! q_1! \dots p_k! q_k! m!} y$$

konvergiert und die folgende Beziehung erfüllt

$$\exp_G(x * y) = \exp_G(x) \exp_G(y).$$

Satz (Integrale Untergruppen). Seien G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann besitzt die von $\exp_G(\mathfrak{h})$ erzeugte integrale Untergruppe

$$H = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle$$

eine Lie-Gruppen-Struktur mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Es gibt eine 0-Umgebung $W \subseteq \mathfrak{h}$, auf der die Dynkin-Reihe konvergiert und

$$\exp_H : \mathfrak{h} \rightarrow H \quad x \mapsto \exp_G(x)$$

bildet W diffeomorph auf sein offenes Bild in H ab, weiterhin

$$\exp_H(x * y) = \exp_H(x) \exp_H(y) \quad \text{für } x, y \in W.$$

- (2) Falls $H \subseteq H_1 \subseteq N_G(H)$ für eine Untergruppe H_1 , so dass H_1/H abzählbar ist, dann gilt

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H_1\}.$$

Insbesondere $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\}$.

Beweise benutzen:

- Satz über die Konstruktion von Lie-Gruppen-Strukturen aus lokalen Daten
- $x, y \in \mathfrak{h} \Rightarrow x * y \in \mathfrak{h}$, da \mathfrak{h} eine Lie-Algebra ist und die Dynkin-Reihe nur Lie-Klammern enthält

Satz (Lie). Jede endlich-dimensionale Lie-Algebra ist die Lie-Algebra einer zusammenhängenden Lie-Gruppe.

Beweis. Ado's Theorem: $\mathfrak{g} \simeq$ Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ mit geeignetem n , Rest folgt aus obigem Satz □

3. WEGZUSAMMENHÄNGENDE UNTERGRUPPEN

Integrale Untergruppen \triangleq Wegzusammenhängende Untergruppen

Satz (Yamabe). Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} . Eine Untergruppe H von G ist wegzusammenhängend genau dann, wenn sie integral ist, das heißt

$$H = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle,$$

wobei die Unteralgebra \mathfrak{h} von \mathfrak{g} folgendermaßen durch H festgelegt ist

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\}.$$

Trivial: integral \Rightarrow wegzusammenhängend: Stetige Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow H = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle$ mit $t \mapsto \exp_G(tx_1) \dots \exp_G(tx_k)$ für $x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{h}$ verbindet $\mathbf{1}$ mit $\exp_G(x_1) \dots \exp_G(x_k) \in \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle$

Ziel: wegzusammenhängend \Rightarrow integral: H zwar nicht zwangsweise abgeschlossen, aber auch Wegzusammenhang impliziert, dass \mathfrak{h} eine Lie-Algebra ist

Definition (Hilfskonstruktion). Seien G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Man nennt $x \in \mathfrak{g}$ H -erreichbar, falls für jede $\mathbf{1}$ -Umgebung U in G ein stetiger Weg γ in H mit $\gamma(0) = \mathbf{1}$ sowie

$$\gamma(t) \in \exp_G(tx)U \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

existiert. Bezeichne im Folgenden $E(H) \subseteq \mathfrak{g}$ die Teilmenge der H -erreichbaren Elemente von \mathfrak{g} .

Bemerkung 1. $x \in E(H) \Rightarrow \exp_G(x) \in \overline{H}$: Umgebungen von $\exp_G(x)$ sind von der Form $\exp_G(x)U$ mit einer $\mathbf{1}$ -Umgebung U , all diese enthalten Elemente von H ($\gamma(1)$ für geeignetes γ)

Yamabe bewiesen, wenn

- (1) $E(H)$ ist Lie-Unteralgebra von \mathfrak{g} (im Detail)
- (2) $H = \langle \exp_G(E(H)) \rangle$ (skizzenhaft)

gezeigt sind, denn (1) und (2) implizieren $E(H) = \{x \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\} = \mathfrak{h}$:

" \supseteq " nach Definition von $E(H)$

" \subseteq " nach (2)

Lemma. $E(H)$ ist eine Lie-Unteralgebra von \mathfrak{g} .

Beweis. Zeigen nacheinander für beliebige $x, y \in E(H)$ und $h \in H$

- (1) $-x \in E(H)$
- (2) $\mathbb{R}x \in E(H)$
- (3) $x + y \in E(H)$ (modulu Lemma)
- (4) $\text{Ad}(h)x \in E(H)$
- (5) $[x, y] \in E(H)$

(1) $x \in E(H)$, U eine $\mathbf{1}$ -Umgebung

- Betrachten stetige Funktion

$$\varphi : [0, 1] \times G \rightarrow G \quad (t, g) \mapsto \exp_G(tx) g \exp_G(-tx)$$

- $\varphi([0, 1] \times \{\mathbf{1}\}) = \{\mathbf{1}\} \subseteq U$, d.h. $[0, 1] \times \{\mathbf{1}\} \subseteq \varphi^{-1}(U)$ offen $\stackrel{\text{Tubenlemma}}{\Rightarrow} \exists \mathbf{1}$ -Umgebung V mit $[0, 1] \times V \subseteq \varphi^{-1}(U)$, d.h. für $t \in [0, 1]$

$$\exp_G(tx)V \exp_G(-tx) \subseteq U, \quad (\text{I})$$

o.B.d.A. $V = V^{-1}$

- $x \in E(H) \Rightarrow \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow H$ mit $\gamma(0) = \mathbf{1}$ und $\gamma(t) \in \exp_G(tx)V$ für $t \in [0, 1]$
- Setzen für $t \in [0, 1]$ $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t)^{-1} \in H$
- $\hat{\gamma}$ stetig und wegen Gleichung (I) für $t \in [0, 1]$

$$\hat{\gamma}(t) \in (\exp_G(tx)V)^{-1} = V^{-1} \exp_G(-tx) \stackrel{(\text{I})}{\subseteq} \exp_G(-tx)U$$

$\Rightarrow -x \in E(H)$

(2) $x \in E(H)$, U eine **1**-Umgebung

- $sx \in E(H)$ für $s \in [0, 1]$, denn ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$ mit $\gamma(0) = \mathbf{1}$ sowie $\gamma(t) \in \exp_G(tx)U$, dann erfüllt $\hat{\gamma}(t) = \gamma(st)$

$$\hat{\gamma}(0) = \mathbf{1} \quad \text{sowie} \quad \hat{\gamma}(t) = \gamma(st) \in \exp_G(t(sx))$$
- $[-1, 1]x \subseteq E(H)$ folgt nun aus (1)
- $kx \in E(H)$ für $k \in \mathbb{N}$
 - Betrachten stetige Funktion

$$\varphi_k : \mathbb{R}^{k+1} \times G^{k+1} \rightarrow G \quad (t_1, \dots, t_{k+1}, g_1, \dots, g_{k+1}) \mapsto \left(\exp_G \left(\sum_{j=1}^{k+1} t_j x \right) \right)^{-1} \prod_{j=1}^{k+1} (\exp_G(t_j x) g_j)$$

- $\varphi_k([0, 1]^{k+1} \times \{\mathbf{1}\}^{k+1}) = \{\mathbf{1}\} \subseteq U$, d.h. $[0, 1]^{k+1} \times \{\mathbf{1}\}^{k+1} \subseteq \varphi_k^{-1}(U)$ offen $\stackrel{\text{Tubenlemma}}{\Rightarrow} \exists$ **1**-Umgebung V mit $\varphi_k([0, 1]^{k+1} \times V^{k+1}) \subseteq U$, d.h. für $t_j \in [0, 1]$

$$\prod_{j=1}^{k+1} (\exp_G(t_j x) V) \subseteq \left(\exp_G \left(\sum_{j=1}^{k+1} t_j x \right) \right) U \quad (\text{II})$$

- $x \in E(H) \Rightarrow \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow H$ mit $\gamma(0) = \mathbf{1}$ und $\gamma(t) \in \exp_G(tx)V$ für $t \in [0, 1]$
- Setzen für $t \in [0, 1]$

$$\hat{\gamma}(t) = \gamma(1)^{[kt]} \gamma(kt - [kt]) \in H,$$

wobei $[kt] = \max\{b \in \mathbb{N} : b \leq kt\}$

- $\hat{\gamma}$ stetig und wegen Gleichung (II) für $t_1, \dots, t_{[kt]} = 1, t_{[kt]+1}, \dots, t_k = 0$ sowie $t_{k+1} = kt - [kt] \in [0, 1]$

$$\hat{\gamma}(t) \in (\exp_G(x)V)^{[kt]} \exp_G((kt - [kt])x)V \stackrel{(\text{II})}{\subseteq} \exp_G(ktx)U,$$

$\Rightarrow kx \in E(H)$

(3) $x, y \in E(H)$, U eine **1**-Umgebung

- Benutzen Lemma: Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ eine C^1 -Kurve mit $\gamma(0) = \mathbf{1}$, $x = \gamma'(0)$ sowie $\gamma_k(t) = \gamma(\frac{t}{k})^k$, dann gibt es für jede **1**-Umgebung U einen Index $N_U \in \mathbb{N}$, so dass für $k \geq N_U$ und $t \in [0, 1]$

$$\gamma_k(t) \in \exp_G(tx)U$$

Beweis benutzt lokale Diffeomorphie der Exponentialabbildung und Stetigkeit von β'

- Sei $\beta : [0, 1] \rightarrow G$ gegeben als $\beta(t) = \exp_G(tx) \exp_G(ty)$
- β ist C^∞ , $\beta(0) = \mathbf{1}$ sowie $\beta'(0) = x + y$
- Fixieren **1**-Umgebung V mit $VV \subseteq U \Rightarrow \exists N_V \in \mathbb{N}$, so dass für $t \in [0, 1]$ und $k \geq N_V$

$$\beta\left(\frac{t}{k}\right)^k = \left(\exp_G\left(\frac{tx}{k}\right) \exp_G\left(\frac{ty}{k}\right)\right)^k \in \exp_G(t(x+y))V \quad (\text{III})$$

- Betrachten stetige Funktion

$$\psi_k : [0, 1] \times G \rightarrow G \quad (t, g) \mapsto \left(\exp_G\left(\frac{tx}{k}\right) \exp_G\left(\frac{ty}{k}\right)\right)^{-k} \left(\left(\exp_G\left(\frac{tx}{k}\right)\right) g \left(\exp_G\left(\frac{ty}{k}\right)\right) g\right)^k$$

- $\psi_k([0, 1] \times \{\mathbf{1}\}) = \{\mathbf{1}\} \subseteq V$, d.h. $[0, 1] \times \{\mathbf{1}\} \subseteq \psi_k^{-1}(V)$ offen $\xrightarrow{\text{Tubenlemma}} \exists$ **1**-Umgebung W mit $\psi_k([0, 1] \times W) \subseteq V$, d.h. für $t \in [0, 1]$

$$\left(\exp_G\left(\frac{tx}{k}\right) W \exp_G\left(\frac{ty}{k}\right) W\right)^k \subseteq \left(\exp_G\left(\frac{tx}{k}\right) \exp_G\left(\frac{ty}{k}\right)\right)^k V \quad (\text{IV})$$

- $x, y \in E(H) \Rightarrow \frac{x}{k}, \frac{y}{k} \in E(H) \Rightarrow \exists \gamma_x, \gamma_y : [0, 1] \rightarrow H$ stetige, in **1** startende Wege mit $\gamma_x(t) \in (\exp_G(\frac{tx}{k}))W$ bzw. $\gamma_y(t) \in (\exp_G(\frac{ty}{k}))W$ für $t \in [0, 1]$
- Setzen für $t \in [0, 1]$

$$\hat{\gamma}(t) = (\gamma_x(t) \gamma_y(t))^k \in H$$

- $\hat{\gamma}$ stetig und wegen Gleichung (III) für $t \in [0, 1]$

$$\hat{\gamma}(t) \in \left(\exp_G\left(\frac{tx}{k}\right) W \exp_G\left(\frac{ty}{k}\right) W\right)^k \stackrel{(\text{IV})}{\subseteq} \left(\exp_G\left(\frac{tx}{k}\right) \exp_G\left(\frac{ty}{k}\right)\right)^k V$$

$$\stackrel{(\text{III})}{\subseteq} \exp_G(t(x+y))VV \subseteq \exp_G(t(x+y))U,$$

$$\Rightarrow x + y \in E(H)$$

(4) $x \in E(H)$, $h \in H$, U eine **1**-Umgebung

- $c_h : G \rightarrow G$ mit $c_h(g) = hgh^{-1}$ ist stetig und $c_h(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \in U \Rightarrow$ finden **1**-Umgebung U_h mit $c_h(U_h) \subseteq U$
- Satz über Ein-Parameter Gruppen: Ist $\eta : \mathbb{R} \rightarrow G$ ein stetiger Homomorphismus von Lie-Gruppen, dann ist η glatt und $\eta(t) = \exp_G(tx)$, wobei $x = \eta'(0)$.
- Setzen $\eta(t) = c_h(\exp_G(tx)) \Rightarrow \eta(t) = \exp_G(t\text{Ad}(h)x)$
- $x \in E(H) \Rightarrow \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow H$ mit $\gamma_x(0) = \mathbf{1}$ sowie $\gamma_x(t) \in \exp_G(tx)U_h$ für $t \in [0, 1]$
- Setzen für $t \in [0, 1]$

$$\hat{\gamma}(t) = c_h(\gamma(t)) \in H$$

- $\hat{\gamma}$ stetig und für $t \in [0, 1]$

$$\hat{\gamma}(t) \in c_h(\exp_G(tx))c_h(U_h) \subseteq \exp_G(t\text{Ad}(h)x)U$$

$$\Rightarrow \text{Ad}(h)x \in E(H)$$

(5) Benutzen

$$\text{Ad}(\exp_G(x)) = e^{\text{ad}(x)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \quad \text{für } x \in \mathfrak{g}$$

- Normalisator $N = \{g \in G : \text{Ad}(g)E(H) = E(H)\}$ von $E(H)$ in G ist geschlossene Untergruppe, denn
 - (1) Ad ist Gruppenhomomorphismus
 - (2) Adjungierte Darstellung von G auf \mathfrak{g} ist glatt
- $H \subseteq N$ folgt aus (4) $\Rightarrow \overline{H} \subseteq N$
- Bemerkung 1 $\Rightarrow \exp_G(E(H)) \subseteq N$, d.h. für $x, y \in E(H)$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Ad}(\exp_G(tx))y = e^{\text{ad}(tx)}y = y + t \text{ad}(x)y + \frac{1}{2}t^2 \text{ad}(x)^2y + \dots \in E(H)$$

- Differentiation an der Stelle $t = 0$ liefert $\text{ad}(x)y = [x, y] \in E(H)$

□

Lemma. *Ist H eine wegzusammenhängende Untergruppe der Lie-Gruppe G , so gilt*

$$H = \langle \exp_G(E(H)) \rangle .$$

Beweis. Benutzen

Lemma. *Sei H eine wegzusammenhängend topologische Gruppe und U eine Umgebung der $\mathbf{1}$. Dann erzeugt die Wegzusammenhangskomponente von U , die $\mathbf{1}$ enthält, ganz H .*

$H \subseteq \langle \exp_G(E(H)) \rangle$: Konstruktion eines geeigneten Weges für vorgegebene $\mathbf{1}$ -Umgebung benutzt

- \mathfrak{p} komplementär zu $E(H)$ in $\mathfrak{g} \Rightarrow E(H) \times \mathfrak{p} \ni (x, y) \mapsto \exp_G(x) \exp_G(y)$ Diffeomorphismus lokal um $(0, 0)$
- Folgenkompaktheit der abgeschlossenen Einheitskugel von \mathfrak{p} ($\dim \mathfrak{p} < \infty$)

$\langle \exp_G(E(H)) \rangle \subseteq H$: Lemma \Rightarrow gzz. H enthält offene $\mathbf{1}$ -Umgebung der integralen Untergruppe $\hat{H} = \langle \exp_G(E(H)) \rangle$ bezüglich der intrinsischen Lie-Gruppen-Topologie (siehe Satz über integrale Untergruppen)

- Kanonische Koordinaten des zweiten Typs: \exists Basis x_1, \dots, x_m von $E(H)$, so dass

$$\varphi :] - 2, 2[^m \rightarrow \hat{H} \quad t = (t_1, \dots, t_m) \mapsto \prod_{j=1}^m \exp_G(t_j x_j)$$

Homöomorphismus auf offene Menge $U \subseteq \hat{H}$ ist

- Man findet in $\mathbf{1}$ startende Wege $\gamma_j : [-1, 1] \rightarrow H$ mit

$$(1) \prod_{j=1}^m \gamma_j(t_j) \in U = \varphi(] - 2, 2[^m)$$

(2) Die durch

$$\prod_{j=1}^m \gamma_j(t_j) = \varphi(f_1(t_1, \dots, t_m), \dots, f_m(t_1, \dots, t_m))$$

definierte Funktion $f = (f_1, \dots, f_m) : [-1, 1]^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ erfüllt: f ist stetig und $\|f(t) - t\| \leq \frac{1}{2}$

- Fixpunktsatz von Brouwer ($\dim H < \infty$) $\Rightarrow f([-1, 1]^m) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < \frac{1}{2}\}$, denn: Ist $y \in \mathbb{R}^m$ mit $\|y\| < \frac{1}{2}$, so hat stetige Abbildung $g_y : [-1, 1]^m \rightarrow [-1, 1]^m$ mit $g_y(x) = x - f(x) + y$ einen Fixpunkt
- $f([-1, 1]^m)$ enthält 0-Umgebung in $] - 2, 2[^m \Rightarrow \gamma_1([-1, 1]) \dots \gamma_m([-1, 1]) \subseteq H$ enthält $\mathbf{1}$ -Umgebung von \hat{H}

□

4. INITIALE UNTERGRUPPEN

Definition. Ein injektiver Lie-Gruppen-Morphismus $\iota : H \rightarrow G$ wird initiale Lie-Untergruppe genannt, falls

- (1) $\mathbf{L}(\iota) : \mathbf{L}(H) \rightarrow \mathbf{L}(G)$, das Differential von ι in $\mathbf{1} \in H$, injektiv ist und
- (2) für jede glatte Abbildung $f : M \rightarrow G$ mit $\text{im}(f) \subseteq H$, wobei M eine glatte Mannigfaltigkeit bezeichnet, die zugehörige Verkettung $\iota^{-1} \circ f : M \rightarrow H$ auch glatt ist.

Lemma. Eine Untergruppe H einer Lie-Gruppe G besitzt bis auf Isomorphie höchstens eine Struktur einer initialen Lie-Untergruppe.

Beweis. $\iota' : H' \hookrightarrow G$, $\iota : H \hookrightarrow G \Rightarrow \iota^{-1} \circ \iota' : H' \rightarrow H, \iota'^{-1} \circ \iota : H \rightarrow H'$ sind glatte Lie-Gruppen-Morphismen und invers zueinander \square

Satz (Initiale Untergruppen). Jede Untergruppe H einer Lie-Gruppe G trägt eine initiale Lie-Untergruppen-Struktur, für die die Identitätskomponente H_0 mit der Wegzusammenhangskomponente von H bezüglich der Teilraumtopologie übereinstimmt. Es gilt

$$\mathbf{L}(H) \cong \{x \in \mathbf{L}(G) : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\} .$$