Einparameter-(Halb-)Gruppen von Operatoren

Norman Metzner

11. Januar 2009

1 Satz von Stone

Motivation - Quantenmechanik: H Hamiltonoperator (selbstadjungiert), $x_0 \in \mathcal{D}(H)$ Zustand mit $\|x_0\| = 1$.
Schrödingergleichung $i\partial_t x(t) = Hx(t)$ mit $x(0) = x_0$, wobei $x(t)$ der Zustand zum Zeitpunkt t
Zeitentwicklung des Hamiltonoperators $U(t) = e^{-itH}$
Lösung der Schrödingergleichung: $x(t) = e^{-itH}x_0$
Mit Hilfe des Funktionalkalküls lesen wir ab, dass $U(t)$ unitär ist (erhält Wahrscheinlichkeits- und Erwartungswerte), d.h.

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle U(t)x_0, U(t)y_0 \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle ,$$

und $U(t)U(s)x_0 = U(t+s)x_0$. Damit sind folgende Definitionen (teilweise) motiviert.

Definition 1.1. Sei X ein Banachraum. Eine einparametrige Familie $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, beschränkter linearer Operatoren von X nach X ist ein *Halbgruppe beschränkter Operatoren auf* X falls

1. $T(0) = I|_X$;
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$ (Halbgruppeneigenschaft).

Eine Halbgruppe $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, ist eine C_0-*Halbgruppe*, falls sie *stark stetig* ist, das heißt

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x \quad \text{für alle } x \in X.$$

Der lineare Operator A definiert durch

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existiert} \right\}$$

und

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

heißt *infintesimaler Erzeuger* von $T(t)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$.

Im Falle eines Hilbertraumes ändern wir die Definition ein wenig ab. Eine *stark stetige, einparametrige, unitäre Gruppe* ist eine Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t)$ in die Menge der unitären Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit:

1. $U(t)U(s) = U(t+s)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ (Gruppeneigenschaft);
2. $\lim\limits_{t \to t_0} U(t)x = U(t_0)x$ für jedes $x \in \mathcal{H}$ (starke Stetigkeit).

Bemerkung 1.2.

1. Der 2. Punkt in der letzten Definition ist äquivalent zu $\lim\limits_{t\to 0} U(t)x = x$ für jedes $x \in \mathcal{H}$, denn

$$\begin{aligned} &U(t)x = U(t-t_0)U(t_0)x = U(t_0)U(t-t_0)x \\ &\lim_{t\to t_0} U(t)x = U(t_0)(\lim_{t\to t_0} U(t-t_0)x) \end{aligned}$$

2. $U(t)^* = U(t)^{-1} = U(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $U(0) = I$

Zuerst werden wir uns mit der Situation im Hilbertraum befassen. Für einen s.a. Operator A in $\mathcal{H}$ mit Spektraldarstellung $A = \int \lambda dE(\lambda)$ definiere

$$U(t) = e^{itA} = \int e^{it\lambda} dE(\lambda) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Satz 1.3. *Sei A ein s.a. Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $U(t) = e^{itA}$.*

1. *$U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ist eine stark stetige, einparametrige, unitäre Gruppe auf $\mathcal{H}$.*
2. *Sei*
$$\mathcal{D}_0 := \left\{ x \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0} \left(\frac{U(t)-I}{t} \right) x \textit{ existiert} \right\}.$$
Es gilt $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(A)$ und $iAx = \lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{U(t)-I}{t}\right) x$ für $x \in \mathcal{D}(A)$.

Beweis. 1. $U(t)$ ist unitär: $U(t)^* = U(t)^{-1} = U(-t)$
Sei $f_t(\lambda) = e^{it\lambda}$. Dann gilt $\overline{f_t(\lambda)} = f_{-t}(\lambda)$, also $f_t(A)^* = f_{-t}(A)$. Außerdem $f_t f_s = f_{t+s} \Rightarrow U(t)U(s) = U(t+s)$. Des Weiteren besitzt die Gruppe offensichtlich genau einen Parameter ist stark stetig.

2. $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}_0$: Sei $x \in \mathcal{D}(A)$. Sei $g_t(\lambda) = \frac{e^{it\lambda}-1}{t} - i\lambda$, $t, \lambda \in \mathbb{R}$.
Aus Mittelwertsatz und Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|g_t(\lambda)| \leq |\frac{1}{t}||e^{it\lambda} - e^{i\cdot 0}| + |\lambda| \leq |\frac{1}{t}||e^{i\xi}| \cdot |t\lambda| + |\lambda| \leq C|\lambda|.$$

Somit $|g_t(\lambda)|^2 \leq C|\lambda|^2$. Die Funktion $|\lambda|^2$ ist $\langle E(\lambda)x, x\rangle$-integrierbar, denn $\int\limits_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 d\,\langle E(\lambda)x, x\rangle = \|Ax\|^2 < \infty$, weil $x \in \mathcal{D}(A)$.
Es ist $\lim\limits_{t\to 0} g_t(\lambda) = 0$, also

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \|g_t(A)x\|^2 &= \lim_{t\to 0} \left\| (\frac{1}{t}(U(t) - I) - iA)x \right\|^2 \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |g_t(\lambda)|^2 d\,\langle E(\lambda)x, x\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} 0 \ d\,\langle E(\lambda)x, x\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

wobei der Satz von Lebesgue benutzt wurde.
$\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{U(t)-I}{t}\right) x = iAx$
Zuletzt $\mathcal{D}(A) \supseteq \mathcal{D}_0$: Sei $iTx \coloneqq \lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{U(t)-I}{t}\right) x$ für $x \in \mathcal{D}_0$. Bereits gezeigt $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}_0$, also $A \subseteq T$. Weiterhin

$$
\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle &= \lim_{t\to 0} \left\langle -i\left(\frac{U(t) - I}{t}\right) x, y \right\rangle \\
&= \lim_{t\to 0} \left\langle x, -i\left(\frac{U(-t) - I}{-t}\right) y \right\rangle = \langle x, Ty\rangle
\end{aligned}
$$

für alle $x, y \in \mathcal{D}_0$. Somit ist T symmetrische Erweiterung eines s.a. Operators, $A \subseteq T$, woraus folgt $A = T$.

$\square$

Satz 1.4 (Stone)**.** *Zu jeder stark stetigen, einparametrigen, unitären Gruppe $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, existiert ein eindeutig bestimmter s.a. Operator A mit $U(t) = e^{itA}$, $t \in \mathbb{R}$. A ist genau dann beschränkt, wenn die operatorwertige Abbildung $t \mapsto U(t)$ normstetig ist.*

Beispiel 1.5. Sei $(U(t)f)(s) = f(t + s)$ für $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dann $\frac{U(t)f-f}{t} = \frac{f(t+s)-f(s)}{t} \overset{t\to 0}{\rightrightarrows} f'(s)$ auf $\mathbb{R}$. Somit $iAf = \lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{U(t)-I}{t}\right) f = f'$ bzw. $Af = -if'$, falls der Limes existiert (d.h. $(e^{itA}f)(s) = f(t + s)$).

Beweis. Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{H}$. Wir definieren $x_f = \int f(t)U(t)x dt$.[1] Sei $\mathcal{D}_0$ die lineare Hülle aller x_f, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{H}$).

Behauptung 1: $\mathcal{D}_0$ ist dicht in $\mathcal{H}$.
Sei $\{f_n\}$ eine δ-Folge, also $\operatorname{supp} f_n \subseteq \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $f_n(t) \geq 0$, und $\int f_n(t)dt = 1$.

[1] Ein solches Banachraum-wertiges Integral wird analog zum Lebesgue-Integral mit Hilfe von Treppenfunktionen definiert.

Dann

$$\begin{aligned}
\|x_{f_n} - x\| &= \left\| \int f_n(t)U(t)x dt - \Big(\int f_n(t) dt \Big) x \right\| \\
&\le \int f_n(t) \, \|U(t)x - x\| \, dt \\
&\le \sup_{t\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]} \|U(t)x - x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

wegen starker Stetigkeit von $U(t)$ ($\lim_{t\to 0} U(t)x = x$). Also $\mathcal{D}_0 \ni x_{f_n} \to x \in \mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$.

Definiere T durch $iTx \coloneqq \lim_{t\to 0} \left(\frac{U(t)-I}{t}\right) x$, falls Grenzwert in $\mathcal{H}$ existiert.

Behauptung 2: $iTx_f = x_{-f'} = -x_{f'}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{U(t_0) - I}{t_0}\right) x_f &= \frac{1}{t_0}\Big(\int f(t) \underbrace{U(t_0)U(t)}_{U(t+t_0)} x dt - \int f(t)U(t)x dt \Big) \\
&\overset{s=t+t_0}{=} \frac{1}{t_0}\left(\int f(s-t_0)U(s) ds - \int f(t)U(t)x dt \right) \\
&= \frac{1}{t_0} \int \left(f(t-t_0) - f(t) \right) U(t) x dt \\
&= - \int \underbrace{\frac{f(t-t_0) - f(t)}{-t_0}}_{\rightrightarrows f'(t) \text{ auf } \mathbb{R} \text{ für } t_0 \to 0} U(t)x dt \\
&\overset{t_0\to 0}{\longrightarrow} - \int f'(t)U(t)x dt = -x_{f'}
\end{aligned}$$

Also $iTx_f = -x_{f'}$. Damit ist T nach Punkt 1 insbesondere dicht, denn $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}(T)$. T ist symmetrisch (siehe Beweis des zweiten Punktes vom obigen Satz).

Behauptung 3: $\bar{T}$ ist s.a. (aus Zeitgründen ohne Beweis).

Behauptung 4: $U(t) = e^{it\bar{T}}$, $t \in \mathbb{R}$.
Sei $V(t) = e^{it\bar{T}}$, $t \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: $U(t) = V(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Nach erstem Satz

$$\frac{d}{dt}|_{t_0} V(t)x = i\bar{T}V(t_0)x \quad \text{für } x \in \mathcal{D}(T).$$

Andererseits gilt für $x \in \mathcal{D}(T)$ nach Definition

$$\frac{d}{dt}|_{t_0} U(t)x = \frac{d}{ds}|_{s=0} U(s)U(t_0)x = iTU(t_0)x.$$

Sei $y(t) = (U(t) - V(t))x$ für $x \in \mathcal{D}(T)$.

$$\frac{d}{dt}|_{t_0} y(t) = i\bar{T}y(t_0) \quad (x \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow U(t)x \in \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(\bar{T}) \Rightarrow y \in \mathcal{D}(\bar{T}))$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle y(t), y(t)\rangle = \langle y'(t), y(t)\rangle + \langle y(t), y'(t)\rangle \\
&= \left\langle i\bar{T}y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle y(t), i\bar{T}y(t)\right\rangle \\
&= \left\langle iy(t), \bar{T}y(t)\right\rangle + \left\langle y(t), i\bar{T}y(t)\right\rangle \\
&= 0 \\
\Rightarrow \|y\| = c
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie von T genutzt haben.
Da $y(0) = (U(0)-V(0))x = x-x = 0$, haben wir $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also $U(t)x = V(t)x$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ und da $\mathcal{D}(T)$ dicht ist, folgt $U(t) = V(t)$ auf $\mathcal{H}$. Beschränktheitsaussage ohne Beweis. $\square$

2 Satz von Hille-Yosida

Nun wenden wir uns dem allgemeineren Fall von Banachräumen zu.

Definition 2.1. Sei $T(t)$ ist eine C_0-Halbgruppe. $T(t)$ ist eine C_0-*Halbgruppe von Kontraktionen*, falls außerdem gilt $\|T(t)\| \leq 1$ für alle t.

Satz 2.2 (Hille-Yosida)**.** *Ein linearer (unbeschränkter) Operator A ist der infinitesimale Erzeuger einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen $T(t)$, $t \geq 0$, genau dann, wenn*

1. *A ist abgeschlossen (d.h. Graph ist abgeschlossen in $X \oplus X$) und dicht definiert, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;*
2. *Die Resolventenmenge[2] $\rho(A)$ von A enthält $\mathbb{R}^+$ und für alle $\lambda > 0$ gilt*
$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Falls A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen ist, dann gibt es höchstens eine solche Halbgruppe. Die Resolvente $R_\lambda(A)$, $\lambda > 0$, ist durch die C_0-Halbgruppe von Kontraktionen wie folgt gegeben

$$R_\lambda(A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X. \tag{1}$$

[2] Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ gehört zur *Resolventenmenge* $\rho(A)$ (für abgeschlossenen linearen Operator auf Hilbertraum $\mathcal{H}$), falls es einen auf ganz $\mathcal{H}$ definierten, beschränkten, linearen Operator $R_\lambda(A)$ gibt mit:

(a) $R_\lambda(A)(A-\lambda I)x = x$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$;

(b) $(A-\lambda I)R_\lambda(A)y = y$ für alle $y \in \mathcal{H}$.

$R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$ heißt *Resolvente* von A im Punkt $\lambda \in \rho(A)$.

Beweisidee. "$\Rightarrow$": Die erste Eigenschaft zeigt man direkt. Für den zweiten Punkt zeigt man, dass (1) die Bedingung an die Norm aus dem zweiten Punkt erfüllt und auch tatsächlich die Resolvente ist.
"$\Leftarrow$": Diese folgt im wesentlichen aus Satz 2.4. Falls A die obigen Voraussetzungen erfüllt, zeigt man, dass die Yosida-Approximation A im Sinne des unten stehenden Satzes approximiert. Die Halbgruppe wird dann über die Gleichung aus dem nachfolgenden Satz definiert und man muss nur die entsprechenden Eigenschaften nachweise. Für Details siehe [Paz83]. □

Der Satz von Hille-Yosida verallgemeinert den Satz von Stone für Banachräume und Halbgruppen statt Hilberträumen und Gruppen (Unitarität fällt weg, da sie auf Banachräumen nicht definiert ist). Allerdings sind die Parameterbereiche verschieden, einmal ganz $\mathbb{R}$ und einmal nur die nichtnegativen reellen Zahlen (kann durch Umparametrisieren kompensiert werden).

Das Theorem von Hille-Yosida lässt sich durch geeignete Renormierung des Banachraums auch auf C_0-Halbgruppen (nicht notwendig Kontraktionen) verallgemeinern (siehe [Paz83], Abschnitt 1.5).

Zuletzt sei noch eine Approximationsaussage erwähnt, deren Beweis sich in [Paz83], Abschnitt 1.3, befindet.

Definition 2.3. Für $\lambda > 0$ ist die *Yosida-Approximation von A* gegeben durch

$$A_\lambda \coloneqq \lambda A R_\lambda(A) = \lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I.$$

(Ersetze A durch $\lambda I + (A - \lambda I)$, um Gleichheit zu sehen.)

Satz 2.4. *Sei A der infinitesimale Erzeuger der C_0-Halbgruppe von Kontraktion $T(t)$. Sei A_λ die Yosida-Approximation von A, dann gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \quad \text{für } x \in \mathcal{D}(A),$$

und

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x \quad \text{für } x \in X.$$

Literatur

[Paz83] A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, 1983.

[Sch] Prof. Schmüdgen: *Unbeschränkte Operatoren auf Hilberträumen.*