

Klassifikation von Hauptfaserbündeln

Wieland Brendel¹

Institute for Theoretical Physics III, University of Erlangen-Nürnberg, D-91058 Erlangen, Germany

(26th March, 2009)

Abstract

In diesem Vortrag soll es um die Klassifikation von Hauptfaserbündeln gehen. Die Milnorsche Konstruktion zeigt, dass sich alle numerierbaren G -Hauptfaserbündel von einem einzigen universellen Bündel induzieren lassen. Die induzierten Bündel werden klassifiziert durch ihre sog. Bündelabbildung. Zwei Bündel sind dann in einer Isomorphieklasse, wenn ihre Bündelabbildung homotop ist. Damit ist die Klassifikation von Hauptfaserbündeln zurückgeführt auf ein Homotopieproblem.

Induzierte Bündel Sei $p : X \rightarrow B$ ein G -Hauptfaserbündel und $f : C \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{F} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

in dem $X^* = \{(c, x) | f(c) = p(x)\} \subset C \times X$ ist und q und F Projektionen auf die entsprechenden Faktoren sind. Die G -Operation auf X induziert eine auf $C \times X$ (nämlich $(c, x)g = (c, xg)$) und eine auf der G -stabilen Teilmenge Y . Ist p trivial über $V \subset B$, so ist q trivial über $f^{-1}(V)$. Deshalb ist q ein G -Hauptfaserbündel, genannt das von p durch f induzierte Bündel.

Definition 1.1 (Bündelabbildung). Sind G -Hauptfaserbündel p, q und eine G -Abbildung F als obiges kommutatives Diagramm gegeben, so wird F eine Bündelabbildung über f genannt.

Warum sind die induzierten Bündel wichtig?

Satz 1.2. Sei $q^* : X^* \rightarrow C$ das von p durch f induzierte Bündel, mit der zugehörigen Bündelabbildung $F^* : X^* \rightarrow X$. Sei $q : Y \rightarrow C$ ein beliebiges Hauptfaserbündel zusammen mit einer Bündelabbildung F gegeben. Dann gibt es genau eine homöomorphe G -Abbildung $h : Y \rightarrow X^*$

mit $hq^* = q$ und $F^* \circ h = F$, die q^* und q identifiziert.

$$\begin{array}{ccccc} & & F^* & & \\ & & \curvearrowright & & \\ X^* & \xleftarrow{h} & Y & \xrightarrow{F} & X \\ & \searrow q^* & \downarrow q & & \downarrow p \\ & & C & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Das Diagramm ist ein Pullback oder Basiswechsel. Erstaunlich ist nun, dass sich alle numerierbaren G -Hauptfaserbündel von einem festen Bündel induzieren lassen. Um das zu zeigen, benötigen wir einige Definitionen:

Definition 1.3 (Numerierbares Bündel). Ein Bündel $p : E \rightarrow B$ heißt **numerierbar**, wenn es eine offene Überdeckung $(U_j | j \in J)$ von B gibt, so dass p über U_j trivial ist und zu $(U_j | j \in J)$ eine untergeordnete Partition der Eins $(\tau_j | j \in J)$, eine **Numerierung der Überdeckung**, existiert, wenn also p über den Mengen einer numerierbaren Überdeckung trivialisiert werden kann.

Man kann zeigen, dass insbesondere jede offene Überdeckung eines Raumes mit untergeordneter Partition der Eins abzählbar ist.² Ein Bündel ist auf einer Menge U_i trivial, wenn eine typische Faser F über U_i existiert, so dass

$$\phi : p^{-1}(U_i) \rightarrow U \times F, \quad z \mapsto (\phi_1(z), \phi_2(z)) \tag{1}$$

¹Electronic address: wieland@theorie3.physik.uni-erlangen.de

²Vgl. [1], p.347, oben

ein Homoöomorphismus ist. Die folgende Einschränkung auf numerierbare Bündel ist nicht besonders schlimm, da alle parakompakten Räume numerierbar sind.

Definition 1.4 (Universelle Bündel). *Ein G -Hauptfaserbündel $p : E_G \rightarrow B_G$ heißt universell, wenn es numerierbar ist und wenn jedes andere numerierbare G -Hauptfaserbündel $q : E \rightarrow B$ bis auf Homotopie genau eine Bündelabbildung nach p besitzt.*

Definition 1.5 (Homotopie von Bündelabbildungen). *Zwei Bündelabbildungen $\alpha_0, \alpha_1 : E \rightarrow E_G$ heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung $\alpha : E \times [0, 1] \rightarrow E_G$ gibt, so dass $\alpha_t : E \rightarrow E_G, x \mapsto \alpha(x, t)$ für jedes $t \in I$ eine Bündelabbildung ist, wenn also α äquivariant bezüglich der G -Operation $g \cdot (x, t) = (gx, t)$ auf $E \times [0, 1]$ ist. Die Abbildung α heißt G -Homotopie von α_0 nach α_1 .*

Ist $p' : E'_G \rightarrow B'_G$ ein weiteres universelles Bündel, so gibt es bis auf Homotopie eindeutige Bündelabbildungen $\beta : E_G \rightarrow E'_G, \gamma : E'_G \rightarrow E_G$. Die Zusammensetzungen $\beta\gamma$ und $\gamma\beta$ müssen als Bündelabbildungen homotop zur Identität sein. Insbesondere sind die Räume B_G und B'_G homotopieäquivalent. Wegen dieser Eindeutigkeit spricht man von *dem* universellen Bündel $E_G \rightarrow B_G$. Der Raum heißt *klassifizierender Raum* zur Gruppe G .

Satz 1.6. *Zu jeder topologischen Gruppe G gibt es ein universelles G -Hauptfaserbündel.*

Der Beweis wird über eine Konstruktion geführt, die nach Milnor benannt ist [2].³ Wir benutzen dazu den *Verbund* von topologischen Räumen. Sei dazu $(X_j | j \in J)$ eine Familie topologischer Räume X_j . Die Elemente des Verbundes

$$X = *_{j \in J} X_j \tag{2}$$

sind definiert als J -Tupel

$$(t_j x_j | j \in J), t_j \in [0, 1], x_j \in X_j, \sum t_j = 1, \tag{3}$$

wobei nur endlich viele der t_j von Null verschieden sind. Die Tupel $(t_j x_j)$ und $(u_j y_j)$

definieren genau dann dasselbe Element von X , wenn gilt:

1. Für alle $j \in J$ ist $t_j = u_j$.
2. Für alle $j \in J$ gilt: $t_j \neq 0$ impliziert $x_j = y_j$.

Weiter definieren wir Koordinatenabbildungen

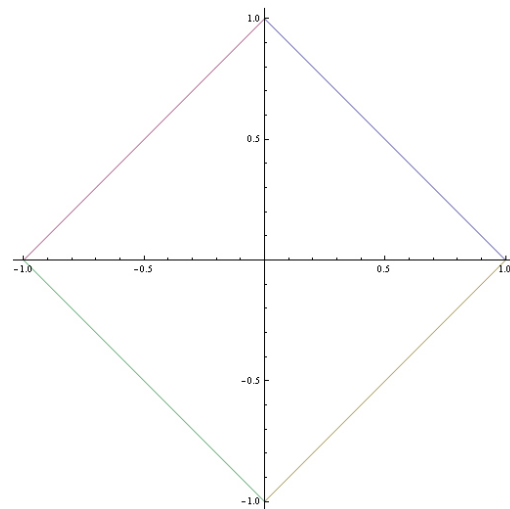
$$\begin{aligned} t_j : X &\rightarrow [0, 1], (t_i x_i) \mapsto t_j, \\ p_j : t_j^{-1}([0, 1]) &\rightarrow X_j, (t_i x_i) \mapsto x_j. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Topologie auf X sei die größte Topologie, für die alle t_j und p_j stetig sind. Sie wird durch folgende Eigenschaften charakterisiert: Eine Abbildung $f : Y \rightarrow X$ eines topologischen Raumes Y ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $t_j f : Y \rightarrow [0, 1]$ und $p_j f : f^{-1} t_j^{-1}([0, 1]) \rightarrow X_j$ stetig sind. Sind insbesondere die X_j G -Räume, so wird durch $(g, (t_j x_j)) \mapsto (t_j g x_j)$ eine stetige G -Operation auf X definiert.

Um ein Gefühl für diesen Raum zu bekommen, betrachten wir $S^0 * S^0$ als einfachstes Beispiel. Die J -Tupel haben in diesem Fall die Form

$$(tx, (1-t)y | t \in [0, 1], x, y \in S^0 = \{-1, 1\}). \tag{5}$$

Die Tupel aufgefasst als Vektoren im \mathbb{R}^2 ergibt mit dem Parameter t das Diagramm



³Genauer hat Milnor in [2] zu jeder Gruppe die G -Hauptfaserbündel $E_G \rightarrow B_G$ beschrieben; Dold zeigt dann in [3], dass diese genau die numerierbaren G -Hauptfaserbündel klassifizieren.

Aufgrund der definierten Äquivalenzrelation sind die Berührungspunkt aber genau miteinander identifiziert,

$$\begin{aligned} (+1 \cdot 0, \pm 1) &\sim (-1 \cdot 0, \pm 1), \\ (\pm 1, +1 \cdot 0) &\sim (\pm 1, -1 \cdot 0). \end{aligned} \tag{6}$$

Mit dieser Identifikation ist dann aber bereits der Verbund $S^0 * S^0$ homoömorph zu S^1 . Allgemeiner kann man zeigen, dass $S^m * S^n$ homoömorph zu S^{n+m+1} .

Der Milnorsche Raum wird nun als

$$E_G = G * G * G * \dots, \tag{7}$$

das heißt als Verbund von abzählbar vielen Exemplaren des Raumes G definiert. Die Wirkung von G auf E_G ist wie oben konstruiert gegeben, wobei G auf G durch Linksmultiplikation operiert. Wir schreiben $B_G = E_G/G$ für den Orbitraum und $p : E_G \rightarrow B_G$ für die Orbitabbildung. Der Beweis von Satz 1.6 läuft über folgende Schritte:

1. Zeige, dass $E_G \rightarrow B_G$ numerierbar ist.
2. Ist E ein G -Raum, so zeige, dass zwei G -Abbildungen $f, g : E \rightarrow E_G$ G -homotop sind.
3. Zeige, dass ein numerierbares G -Hauptfaserbündel eine G -Abbildung $\phi : E \rightarrow E_G$ besitzt.
4. Sind zwei Abbildungen $f, f' : B \rightarrow B_G$ homotop, so sind die induzierten Bündel isomorph.

Schritt 1) bis 3) sind nötig zur Beweis von (1.6). Nach Schritt 4) sind dann die durch die $f \in [B, B_G]$ aus dem universellen Bündel induzierten Bündel isomorph; da nach Schritt 2) für jedes G -Hauptfaserbündel q eine klassifizierende Abbildung $k : B \rightarrow B_G$ existiert und q nach (1.2) isomorph zu dem induzierten Bündel k^*E_G ist, existiert eine Bijektion zwischen der Isomorphieklasse $\mathfrak{B}(G, B)$ und der Homotopieklasse der klassifizierenden Abbildung $[B, B_G]$.

Der Beweis erster Bedingung ist länglich und bringt wenig neue Einsichten. Wir konzentrieren uns deshalb auf die letzten drei Punkte.

Satz 1.7. *Sei E ein G -Raum. Je zwei G -Abbildungen $f, g : E \rightarrow E_G$ sind G -homotop.*

Beweis. Als Koordinatendarstellung von f, g kann man wählen

$$\begin{aligned} (t_1(x) f_1(x), t_2(x) f_2(x), \dots) \text{ und} \\ (u_1(x) g_1(x), u_2(x) g_2(x), \dots). \end{aligned} \tag{8}$$

Wir wollen zeigen, dass f, g G -homotop zu Abbildungen mit den Koordinatendarstellungen

$$\begin{aligned} (t_1(x) f_1(x), 0, t_2(x) f_2(x), 0, \dots) \text{ und} \\ (0, u_1(x) g_1(x), 0, u_2(x) g_2(x), \dots). \end{aligned} \tag{9}$$

Ist diese Gestalt erreicht, kann man beide Abbildungen über

$$((1-t)t_1 f_1, tu_1 g_1, (1-t)t_2 f_2, tu_2 g_2, \dots) \tag{10}$$

homotop verbinden. Nimm als Beispiel f und gehe von obiger Form aus. Dann definiere die Homotopie für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ durch

$$(t_1 f_1, 2tt_2 f_2, (1-2t)t_2 f_2, 2tt_3 f_3, (1-2t)t_3 f_3, \dots). \tag{11}$$

Damit haben wir die erste Null beseitigt. Ab dem Punkt $t = \frac{1}{2}$ schließt man eine sinngemäße Homotopie auf dem Intervall $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ an, also z.B.

$$(t_1 f_1, t_2 f_2, (4t-2)t_3 f_3, (3-4t)t_3 f_3, (4t-2)t_4 f_4, \dots). \tag{12}$$

Damit haben wir die zweite Null eliminiert und es folgt der nächste Schritt auf dem Intervall $t \in [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$, usw. Die gesamte Homotopie ist stetig, da an jeder Stelle in den Tupeln nur endlich viele Schritte wirksam sind. \square

Der dritte Punkt des Beweises ist

Satz 1.8. *Sei $p : E \rightarrow B$ ein numerierbares G -Hauptfaserbündel. Dann existiert eine G -Abbildung $\phi : E \rightarrow E_G$.*

Beweis. Nach Def. eines numerierbaren Hauptfaserbündels ex. eine abzählbare offene Überdeckung $(U_n | n \in \mathbb{N})$ von E , die p trivialisiert. Sei $\psi_n : p^{-1}(U_n) \rightarrow U_n \times G$ eine lokale Trivialisierung auf U_n von p . Nach Definition gilt $p(xg) = p(x)$, somit ist $p^{-1}(U_n)$ eine G -stabile Teilmenge. Sie ist weiter sogar G -trivial,

denn die Projektion $\text{pr} : U \times G \rightarrow G$ auf G gibt dann eine G -Abbildung $\phi_n := \text{pr} \circ \psi_n : U_n \rightarrow G$. Da E numerierbar existiert eine Partition der Eins ($v_n | n \in \mathbb{N}$) durch G -invariante Funktionen, die (U_n) untergeordnet ist. Dann ist

$$\phi(x) = (v_1(x)\phi_1(x), v_2(x)\phi_2(x), \dots) \quad (13)$$

die gesuchte G -Abbildung. □

Damit haben wir nun für jede Transformationsgruppe G ein universelles Bündel gefunden, von dem sich alle (numerierbaren) G -Hauptfaserbündel induzieren lassen. Schritt 4) ist nun durch folgenden Homotopiesatz gegeben, dessen Beweis in ([1], p. 349ff) nachvollzogen werden kann.

Satz 1.9. *Sei $q : E \rightarrow C$ ein numerierbares G -Hauptfaserbündel und $H : B \times I \rightarrow C$ eine Homotopie. Dann sind die induzierten Bündel $H_0^*(q)$ und $H_1^*(q)$ isomorph.*

Insbesondere sind alle von einem universellen G -Hauptfaserbündel induzierten numerierbaren G -Hauptfaserbündel, die sich lediglich durch eine homotope Bündelabbildung unterscheiden, isomorph zueinander. Sei $q : E \rightarrow B$ ein numerierbares G -Hauptfaserbündel. Die bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung $k : B \rightarrow B_G$, die q vom universellen Bündel induziert, heißt *klassifizierende Abbildung* von q .

Indem wir jeder Isomorphieklasse eines Bündels die Homotopieklasse der klassifizierenden Abbildung zuordnen, erhalten wir $\kappa : \mathcal{B}(G, B) \rightarrow [B, B_G]$. Eine Umkehrabbildung wird dadurch gegeben, dass jedem $k : B \rightarrow B_G$ das durch k induzierte Bündel zugeordnet wird. Also ist κ bijektiv. Damit ist die Klassifikation der Bündel

auf ein Problem der Homotopietheorie zurückgeführt.

Ein wichtiger Satz für die Praxis ist

Satz 1.10. *Ein numerierbares G -Hauptfaserbündel $q : E \rightarrow B$ ist genau dann universell, wenn E (als Raum ohne Gruppenoperation) zusammenziehbar ist.⁴*

Wir wollen einen konkreten klassifizierenden Raum zur Transformationsgruppe S^1 angeben. Wir wissen bereits, dass der Verbund $S^m * S^n$ homoömorph zu S^{m+n+1} ist. Dann ist der Verbund von k Exemplaren S^1 homoömorph zu S^{2k-1} . Fassen wir S^1 als Gruppe auf, so kann der Homoömorphimus $S^1 * \dots * S^1 \cong S^{2k-1}$ so gewählt werden, dass er die S^1 -Operation respektiert, wenn wir S^{2k-1} als Einheitssphäre im \mathbb{C}^k mit der Standard-Operation $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ ansehen. Dann macht es Sinn, als Ansatz das Hopfbündel

$$S^{2k-1} \rightarrow S^{2k-1}/S^1 = \mathbb{C}P^{k-1} \quad (14)$$

zugrunde zu legen; für den Übergang $k \rightarrow \infty$ sollte das Hopfbündel homotop zur Milnorschen Konstruktion sein. Da das Hopfbündel numerierbar ist⁵, kann man induktiv die S^1 -Abbildung $S^{2k-1} \rightarrow E_{S^1}$ zur S^1 -Abbildung S^{2k+1} -Abbildung erweitern und damit eine numerierbare S^1 -Abbildung $S^\infty \rightarrow E_{S^1}$ konstruieren. Da nun S^∞ zusammenziehbar ist, folgt aus Satz 1.10 bereits, dass das Bündel universell ist. Der klassifizierende Raum von S^1 ist also der unendlich dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^\infty$. Er kann auch geschrieben werden als sog. Grassmannsche Mannigfaltigkeit $G_1(\mathbb{C}^\infty)$.

References

[1] T. tom Dieck, Topologie, 2. Auflage, de Gruyter, 2000.
 [2] J. Milnor, Constructions of universal bundles, II. Ann. of Math., II Ser. 63, 430-436 (1956).
 [3] A. Dold, Partitions of unity in the theory of fibrations. Ann. of Math., II. Ser. 78, 223-255 (1963).

⁴[1], p. 351, (4.13), der Beweis läuft über Schnitte des assoziierten Faserbündels.
⁵ S^n ist parakompakt.