

**Vorgehen** In diesem Vortrag wurden die grundlegenden Begriffe zur Lie-Algebra Kohomologie erklärt. Ausgehend von der Definition des Chevalley-Eilenberg Differentials wurden die Kohomologieräume eingeführt. Daraufhin haben wir nachvollzogen dass diese zwei Definitionen vernünftig zueinander passen. Im Zuge dessen haben wir unseren Werkzeugkasten um mehr Lemmata bereichert.

**Definition:** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra und  $V$  ein  $\mathfrak{g}$ -Modul. Das Chevalley-Eilenberg-Differential  $d : C^p(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g}, V)$  für  $V$ -wertige  $p$ -lineare alternierende Abbildungen auf  $\mathfrak{g}$  ist definiert als

$$d\omega(x_0, \dots, x_p) := \sum_{i=0}^p (-1)^i x_i \cdot \omega(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p).$$

**Definition:** Die Elemente des Raumes

$$Z^k(\mathfrak{g}, V) := \ker(d|_{C^k(\mathfrak{g}, V)})$$

heißen  $k$ -Kozykel und die Elemente des Raumes

$$B^k(\mathfrak{g}, V) := d(C^{k-1}(\mathfrak{g}, V)) \quad B^0(\mathfrak{g}, V) := \{0\}$$

heißen  $k$ -Koränder. Der  $k$ . Kohomologieraum von  $\mathfrak{g}$  mit Werten im Modul  $V$  ist definiert als:

$$H^k(\mathfrak{g}, V) := Z^k(\mathfrak{g}, V) / B^k(\mathfrak{g}, V)$$

Damit die letzte Definition sinnvoll ist muss  $B^k(\mathfrak{g}, V) \subseteq Z^k(\mathfrak{g}, V)$ . Dies ist der Fall, denn  $d^2 = 0$ . Um das einzusehen führt man die nachfolgende Darstellung ein und gelangt über einige Zwischenschritte zu diesem beruhigenden Ergebnis.

**Lemma:** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra und  $V$  ein  $\mathfrak{g}$ -Modul. Dann definieren

$$(\rho_+(x) \cdot \omega)(x_1, \dots, x_p) = x \cdot \omega(x_1, \dots, x_p)$$

sowie

$$(\rho_0(x) \cdot \omega)(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \omega([x, x_i], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$$

Darstellungen auf  $C^p(\mathfrak{g}, V)$ . Ihre Summe  $\rho := \rho_+ + \rho_0$  definiert eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf  $C(\mathfrak{g}, V)$ ,

$$(\rho(x) \cdot \omega)(x_1, \dots, x_p) = x \cdot \omega(x_1, \dots, x_p) + \sum_{i=1}^p (-1)^i \omega([x, x_i], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$$

**Lemma:** Für die Darstellung  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(C(\mathfrak{g}, V))$  gilt Cartans Formel:

$$\rho(x) = d \circ i(x) + i(x) \circ d$$

Weiterhin gilt für  $x, y \in \mathfrak{g}$ , dass

$$i([x, y]) = [i(x), \rho(y)]$$

sowie

$$[\rho(x), d] = 0.$$

**Satz:**  $d^2 = 0$