

Kohomologie - so what?

Während im vorhergehenden Vortrag die grundlegenden Definitionen und Konstrukte in Verbindung mit Lie-Algebren Kohomologie eingeführt wurden, sollen nun erste Anwendungen diskutiert werden. Im Vordergrund steht dabei zunächst die Erweiterungstheorie von Lie-Algebren. Diese tauchte schon in vorhergehenden Vorträgen teils implizit, teils explizit auf und soll nun auf eine fundierte Grundlage gestellt werden.

Definition: Seien $\mathfrak{n}, \mathfrak{g}$ Lie-Algebren. Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{\iota} \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{q} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

heißt Erweiterung von \mathfrak{g} durch \mathfrak{n} . Hierbei sind ι und q Homomorphismen von Lie-Algebren.

Ein sinnvoller Isomorphiebegriff ist im allgemeinen dadurch gegeben, dass alle vorhandene Struktur respektiert wird. In unserem Fall heißt das folgendes:

Definition: Seien $\mathfrak{n}, \mathfrak{g}$ Lie-Algebren und

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{\iota_1} \hat{\mathfrak{g}}_1 \xrightarrow{q_1} \mathfrak{g} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{\iota_2} \hat{\mathfrak{g}}_2 \xrightarrow{q_2} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

Lie-Algebra-Erweiterungen von \mathfrak{g} durch \mathfrak{n} . Die Erweiterungen heißen äquivalent, falls es einen Homomorphismus von Liealgebren $\phi : \hat{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}_2$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \xrightarrow{\iota_1} & \hat{\mathfrak{g}}_1 & \xrightarrow{q_1} & \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_{\mathfrak{n}} & & \downarrow \phi & & \downarrow id_{\mathfrak{g}} \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \xrightarrow{\iota_2} & \hat{\mathfrak{g}}_2 & \xrightarrow{q_2} & \mathfrak{g} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Wenn ϕ existiert, so ist ϕ automatisch ein Isomorphismus von Lie-Algebren, so dass die obige Definition eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Lie-Algebra-Erweiterungen von \mathfrak{g} durch \mathfrak{n} definiert. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $Ext(\mathfrak{g}, \mathfrak{n})$.

Vergessen wir für einen Moment die Lie-Algebren-Strukturen einer Erweiterung, d.h. wechseln wir in die Kategorie von Vektorräumen und linearen Abbildungen. Dann ist das Erweiterungsproblem sehr einfach: Der Vektorraum $\hat{\mathfrak{g}}$ ist isomorph zur direkten Summe $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}$, indem man \mathfrak{n} mit seinem Bild in $\hat{\mathfrak{g}}$ identifiziert und sich für eine Basis von \mathfrak{g} beliebige Urbildvektoren in $\hat{\mathfrak{g}}$ sucht und die Abbildung q auf diesem Wege durch eine Abbildung $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$ rechtsseitig invertiert. Wir kennen also die Vektorraum-Struktur auf $\hat{\mathfrak{g}}$, es bleibt die Lie-Algebra-Struktur zu klären. Die Diskussion für Vektorräume motiviert folgende Definition:

Definition: Eine Erweiterung $q : \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit $\ker(q) = \mathfrak{n}$ heißt trivial, falls es einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$ mit $q \circ \sigma = id_{\mathfrak{g}}$ gibt.

Wir betrachten im folgenden ausschließlich den Spezialfall einer Erweiterung, bei dem \mathfrak{n} abelsch ist. In diesem speziellen Setting liefert die Abbildung $q(x) \cdot n := [x, n]$, $x \in \hat{\mathfrak{g}}$ eine wohldefinierte \mathfrak{g} -Modul-Struktur auf \mathfrak{n} , da die Lieklammer unabhängig von der Wahl des Urbildes von $q(x)$ in $\hat{\mathfrak{g}}$ ist. Diese Struktur ist stabil unter äquivalenten Erweiterungen. \mathfrak{n} ist nun zwar als Lie-Algebra langweilig, weil abelsch, trägt dafür aber zusätzliche Struktur als \mathfrak{g} -Modul. Es stellt sich die folgende Frage: Gegeben ein \mathfrak{g} -Modul (V, ρ_V) , i.e. eine abelsche Lie-Algebra V mit einer \mathfrak{g} -Darstellung ρ_V auf V : Welche Erweiterungen von \mathfrak{g} durch V induzieren auf dem oben beschriebenen Weg die durch ρ_V vorgegebene \mathfrak{g} -Modul-Struktur? Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen solcher Erweiterungen mit $Ext_{\rho_V}(\mathfrak{g}, V)$.

Satz: Für einen \mathfrak{g} -Modul (V, ρ_V) und $\omega \in C^2(\mathfrak{g}, V)$ definiert die Formel

$$[(v, x), (v', x')] = (x \cdot v' - x' \cdot v + \omega(x, x'), [x, x'])$$

genau dann eine Lie-Algebra-Struktur auf $V \times \mathfrak{g}$, wenn $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, V)$. Notation: $V \oplus_\omega \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\omega$. Jede Erweiterung in $\text{Ext}_{\rho_V}(\mathfrak{g}, V)$ hat diese Form. Zwei Erweiterungen der Form

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g}_{\omega, \omega'} \xrightarrow{q} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

sind genau dann äquivalent, wenn $\omega - \omega'$ ein Korand ist. Wir erhalten also eine Bijektion

$$H^2(\mathfrak{g}, V) \rightarrow \text{Ext}_{\rho_V}(\mathfrak{g}, V).$$

Die erste Behauptung folgt durch Nachrechnen aus der Tatsache, dass sowohl die Jacobi-Identität als auch die Zykelbedingung für 2-Koketten zyklisch ist. Um zu sehen, dass jede Erweiterung äquivalent zu einem \mathfrak{g}_ω ist, wählt man sich zunächst einen Schnitt σ auf dem Level von Vektorräumen. Den Fehler, den dieses σ macht, d.h. die Abweichung der Abbildung σ davon, ein Lie-Algebren-Homomorphismus zu sein, korrigiert man durch die Wahl des 2-Kozykel $\omega(x, y) := [\sigma(x), \sigma(y)] - \sigma([x, y])$. Zur Invarianz bezüglich Korändern schließlich überlegt man sich, dass eine Äquivalenzabbildung ϕ zwischen zwei Erweiterungen \mathfrak{g}_ω und $\mathfrak{g}_{\omega'}$ gerade durch einen Lie-Algebren-Homomorphismus $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow V$, i.e. eine 1-Kokette festgelegt wird. Deren Rand berechnet sich gerade zu $\omega - \omega'$.

Mittels paralleler Begriffsbildung kann man Erweiterungen (und Äquivalenzklassen von Erweiterungen) von \mathfrak{g} -Moduln definieren. Durch sehr ähnliche Überlegungen wie im obigen Fall erhält man folgendes Resultat:

Satz: Für \mathfrak{g} -Moduln (ρ_A, A) , (ρ_B, B) gilt:

$$\text{Ext}(B, A) \cong H^1(\mathfrak{g}, \text{Hom}(A, B)),$$

wobei $\text{Hom}(A, B)$ die folgende \mathfrak{g} -Modul-Struktur trägt:

$$x \cdot \phi := \rho_A(x) \circ \phi - \phi \circ \rho_B(x)$$

Nach diesen sehr allgemeinen Resultaten beschäftigt sich der letzte Teil des Vortrages mit der Berechnung von Kohomologie für spezielle Klassen von Lie-Algebren. Während die Theorie bisher unabhängig von den vorangegangenen Vorträgen entwickelt wurde, kommen nun auch die bereits entwickelte Strukturtheorie zum Einsatz. Wir erhalten z.B. das folgende sehr nützliche Ergebnis:

Lemma: Sei V ein endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Modul einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann gilt

$$H^p(\mathfrak{g}, V) \cong Z^p(\mathfrak{g}, V)^\mathfrak{g} / B(\mathfrak{g}, V)^\mathfrak{g},$$

jede Kohomologiekategorie kann also durch einen invarianten Kozykel repräsentiert werden.

Der Beweis ist sehr einfach: Wir wissen, dass der \mathfrak{g} -Modul $Z(\mathfrak{g}, V)$ zerfällt in $Z(\mathfrak{g}, V) = Z(\mathfrak{g}, V)^\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \cdot Z(\mathfrak{g}, V)$. Da \mathfrak{g} aber trivial auf der Kohomologie operiert, sind die Elemente im zweiten Summanden Koränder und wir erhalten das gewünschte Resultat.

Unter Benutzung einiger weiterer Resultate und Konstrukte aus vorangegangenen Vorträgen und mit etwas zusätzlichem technischem Aufwand kann man schließlich den folgenden Verschwindungssatz beweisen:

Theorem: (Whitehead) Sei V ein endlich-dimensionaler \mathfrak{g} -Modul einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} und sei $V^\mathfrak{g} = \{0\}$. Dann gilt $H^p(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$ für alle $p \in \mathbb{N}$.