NICHT ABGESCHLOSSENE UNTERGRUPPEN

FLORIAN KLEIN, PETER HERBRICH

Was zeichnet Lie-Gruppen aus?

Es ist das Zusammenspiel von Gruppenstruktur, Topologie und differenzieller Struktur.

Satz (Abgeschlossene Untergruppen). *Abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind selbst Lie-Gruppen.*

Topologie + Gruppenstruktur → Differenzielle Struktur

Proposition. *Eine Untergruppe einer Lie-Gruppe ist selbst eine Lie-Gruppe bezüglich der Teilraumtopologie genau dann, wenn sie abgeschlossen ist.*

Ist die Story damit zu Ende?

Satz (Integrale Untergruppen). *Seien G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann besitzt die von $\exp_G(\mathfrak{h})$ erzeugte* integrale *Untergruppe*

$$H = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle$$

eine Lie-Gruppen-Struktur mit den folgenden Eigenschaften:

(1) *Es gibt eine 0-Umgebung $W \subseteq \mathfrak{h}$, auf der die Dynkin-Reihe konvergiert und*

$$\exp_H : \mathfrak{h} \to H \qquad x \mapsto \exp_G(x)$$

bildet W diffeomorph auf sein offenes Bild in H ab, weiterhin

$$\exp_H(x * y) = \exp_H(x) \exp_H(y) \qquad \text{für}\, x, y \in W.$$

(2) *Falls $H \subseteq H_1 \subseteq N_G(H)$ für eine Untergruppe H_1, so dass H_1/H abzählbar ist, dann gilt*

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H_1\}.$$

Insbesondere

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\}.$$

Satz (Lie). *Jede endlich-dimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist die Lie-Algebra einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G.*

Satz (Yamabe). *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Eine Untergruppe H von G ist wegzusammenhängend genau dann, wenn sie integral ist, das heißt*

$$H = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle \,,$$

wobei die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ folgendermaßen durch H festgelegt ist

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\} \,.$$

Kurzum: Integrale Untergruppen $\triangleq$ Wegzusammenhängende Untergruppen

Definition. Ein injektiver Lie-Gruppen-Homomorphismus $\iota : H \to G$ wird initiale Lie-Untergruppe genannt, falls

(1) $d_{\mathbf{1}}\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, das Differential von ι in $\mathbf{1}$, injektiv ist und
(2) für jede glatte Abbildung $f : M \to G$ mit $\mathrm{im}(f) \subseteq H$, wobei M eine glatte Mannigfaltigkeit bezeichnet, die zugehörige Verkettung $\iota^{-1} \circ f : M \to H$ ebenfalls glatt ist.

Satz (Initiale Untergruppen). *Jede Untergruppe H einer Lie-Gruppe G trägt eine initiale Lie-Untergruppen-Struktur, für die die Identitätskomponente H_0 mit der Wegzusammenhangskomponente von H bezüglich der Teilraumtopologie übereinstimmt. Es gilt*

$$\mathbf{L}(H) \cong \{x \in \mathbf{L}(G) : \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\} \ .$$