1 Zusammenfassung: Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln

Definition 1.1. Sei G eine Lie-Gruppe, $\mathfrak{g}$ die zugehörige Lie-Algebra und $\pi : E \to M$ ein Hauptfaserbündel ξ. Ein Zusammenhang auf diesem Bündel ist eine 1-Form $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ für die gilt:

1. $\theta_p(\dot{\sigma}_p(x)) = x \; \forall x \in \mathfrak{g}$,
   wobei $\dot{\sigma}_p : \mathfrak{g} \to T_p(E)$ das Differential der Abbildung $g \mapsto pg$ ist.

2. $\sigma_g^*\theta = Ad(g^{-1}) \circ \theta \; \forall g \in G$,
   wobei $\sigma_g : E \to E$ gegeben ist durch die Abbildung $p \mapsto pg$.

Proposition 1.2. *Jede Konvexkombination von Zusammenhängen ist ein Zusammenhang.*

Proposition 1.3. *Es sei $h : \xi' \to \xi$ ein Hauptfaserbündelmorphismus, θ ein Zusammenhang auf ξ, so ist $h^*\theta$ ein Zusammenhang auf ξ'.*

Definition 1.4. Ein Vektorfeld $X \in T_p(E)$ heißt vertikal, wenn $X \in \mathrm{im}(\dot{\sigma}_p)$.

Definition 1.5. Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(E, V)$, V ein Vektorraum, heißt horizontal, wenn

$$X_1, ...X_k \in T_x(E), \exists\ i \text{ mit } X_i \text{ vertikal } \Rightarrow \omega(X_1, ..., X_k) = 0.$$

Definition 1.6. Sei V eine Darstellung von G.
Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(E, V)$ heißt äquivariant (vom Typ τ), wenn

$$\tau_{g^{-1}}\omega = \sigma_g^*\omega \ \forall\ g \in G.$$

Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(E, V)$ heißt invariant, wenn

$$\omega = \sigma_g^*\omega \ \forall\ g \in G.$$

Bezeichne die horizontalen, invarianten Formen $\omega \in \Omega^k(E)$ mit $\Omega^*(E)^{inv}_{Hor}$.

Proposition 1.7. *Die Abbildung $\pi^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(E)$ ist injektiv mit Bild $\Omega^*(E)^{inv}_{Hor}$.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Normans Satz, wobei wir $F = \mathbb{R}$ und $\tau = id$ wählen. □

Bemerkung 1.8. An dieser Stelle möchte ich noch einmal an die Definition des Wedgeprodukts von vektorwertigen Formen erinnern.

Sei $\omega_1 \in \Omega^k(M,V),\ \omega_2 \in \Omega^l(M,W)$, so ist $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{k+l}(M, V \otimes W)$ definiert durch

$$\begin{aligned}
&\omega_1 \wedge \omega_2(X_1, \dots, X_l) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\ \omega_1(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \otimes \omega_2(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+l}, \\ \sigma(1)<\dots<\sigma(k), \\ \sigma(k+1)<\dots\sigma(k+l)}} \operatorname{sgn}(\sigma)\ \omega_1(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \otimes \omega_2(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}$$

Definition 1.9. Für ω und $\omega' \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ definiert man die 2-Form $[\omega, \omega']$ als das Bild von $\omega \wedge \omega'$ unter der Abbildung, die durch $[-,-] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ induziert wird.
Insbesondere gilt $[\omega, \omega](X,Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)]$.

Definition 1.10. Sei θ ein Zusammenhang, $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$, so definiert man die Krümmungsform $F \in \Omega^2(E, \mathfrak{g})$ durch $F = D\theta$.

Satz 1.11. *Für F gilt:*

a) F ist äquivariant (bzgl. Ad) und horizontal.

b) $F = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$

c) $dF = [F, \theta]$ (Bianchi-Identität)

2 Chern-Weil-Homomorphismus

Ziel dieses Abschnitts ist es, charakteristische Klassen zu Hauptfaserbündeln zu konstruieren. Wir konstruieren einen Algebrenhomomorphismus von der Algebra der invarianten homogenen Polynomen über $\mathbb{K}$ in die Kohomologie des Basisraums. Dies hilft uns oft, die Kohomologie besser zu verstehen.

Definition 2.1. Sei V ein endl. dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $S^k(V^*)$ der Raum der $\mathbb{K}$-wertigen, symmetrischen, multilinearen Funktionen in k Variablen. $P \in S^k(V^*)$ ist eine lineare Abbildung $P : V \otimes \dots \otimes V \to \mathbb{K}$ welche invariant unter der Operation der symmetrischen Gruppe ist.
Sei $P \in S^k(V^*), Q \in S^l(V^*)$, so definiert man $P \circ Q \in S^{k+l}(V^*)$ durch

$$P \circ Q(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} P(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot Q(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

$S^*(V^*) := \coprod_{k \geq 0} S^k(V^*)$ ist nun eine graduierte Algebra.

Satz 2.2. *Sei dim $V = n, \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V, so ist $S^*(V^*)$ als graduierte Algebra isomorph zu $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.*
Der Isomorphismus ist gegeben durch Abbildungen$^{\sim}$: $S^k(V^*) \to \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^k$, wobei

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^k$ die homogenen Polynome vom Grad k sind.
Für $P \in S^k(V^*)$ ist $\widetilde{P} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^k$ gegeben durch

$$\widetilde{P}(x_1, \dots, x_n) = P(v, \dots, v) \text{ mit } v = \sum_i x_i e_i.$$

Definition 2.3. Sei nun G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Man definiert eine Wirkung von G auf $S^k(\mathfrak{g}^*)$ durch

$$(gP)(v_1, \dots, v_k) = P(Ad(g^{-1})v_1, \dots, Ad(g^{-1})v_k),\ v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{g},\ g \in G$$

$I^k(G)$ sei der G-invariante Teil von $S^k(\mathfrak{g}^*)$. Die Multiplikation vererbt sich, so dass wir von $I^*(G)$ reden können. Wir nennen diese Algebra die invarianten Polynome auf $\mathfrak{g}$.

Nun betrachten wir wieder ein Hauptfaserbündel $\xi = (E, M, G, \pi)$ über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und θ einen Zusammenhang in ξ, $F \in \Omega^2(E, \mathfrak{g})$ die zugehörige Krümmungsform.
Für $k \geq 1$ sei $F^k = F \wedge \dots \wedge F \in \Omega^{2k}(E, \mathfrak{g}^{\otimes k})$. Nun sehen wir, dass es für $P \in I^k(G)$ sinnvoll ist, P und F hintereinander zu schalten, man definiert also

$$P(F^k)(X_1, \dots, X_{2k}) = P(F^k(X_1, \dots, X_{2k})) \in \mathbb{K} \text{ für } x \in E,\ X_i \in T_x(E).$$

Somit ist $P(F^k) \in \Omega^{2k}(E)$.

Lemma 2.4. *$P(F^k)$ ist invariant und horizontal und somit nach Proposition 1.7 Urbild einer Form in $\Omega^{2k}(M)$. Wir schreiben $P(F^k)$ auch für $(\pi^*)^{-1}(P(F^k))$.*

Beweis. Nach 1.11 ist F horizontal. Somit ist aber auch F^k horizontal (nach Einsetzen von mind. einem vertikalen Vektorfeld ist in jedem Summanden einer der Faktoren des Tensorprodukts 0). Also ist auch $P(F^k)$ horizontal, da P linear ist.
Für die Invarianz betrachten wir

$$\sigma_g^* P(F^k) = P(\sigma_g^*(F^k)) = P((\sigma_g^* F)^k) \underset{1.11}{=} P((Ad(g^{-1}) \circ F)^k) \underset{\substack{P \text{ invariant} \\ \text{unter } Ad}}{=} P(F^k)$$

□

Lemma 2.5. *$P(F^k) \in \Omega^{2k}(M)$ ist geschlossen.*

Beweis. Es genügt nach Prop. 1.7 zu zeigen, dass $dP(F^k) = 0$ in $\Omega^*(E)$.

Hierzu zeigen wir zunächst $dP(F^k) = P(d(F^k))$:

$$\begin{aligned}
dP(F^k)(X_1, \dots, X_{2k+1}) &= \Bigg[\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i+1} X_i (P(F^k(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{2k+1}))) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (P(F^k([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{2k+1}))) \Bigg] \\
&= \Bigg[\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i+1} P(X_i (F^k(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{2k+1}))) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (P(F^k([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{2k+1}))) \Bigg] \\
&= P(d(F^k)(X_1, \dots, X_{2k+1}))
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir also

$$P(dF^k) = P\left(\sum_i F \wedge \cdots \wedge F \wedge \underbrace{dF}_{\text{i-te Stelle}} \wedge F \cdots \wedge F \right)$$

da F eine 2-Form ist. Wir wissen aber, dass P symmetrisch und daher

$$P\left(\sum_i F \wedge \cdots \wedge F \wedge \underbrace{dF}_{\text{i-te Stelle}} \wedge F \cdots \wedge F \right) = kP\left(dF \wedge F^{k-1} \right)$$

Weiter wissen wir nach Satz 1.11 $dF = [F, \theta]$, also zusammen

$$dP(F^k) = kP([F, \theta] \wedge F^{k-1}).$$

Da P G-invariant ist, gilt

$$P\left(Ad(g_t)Y_1, \dots, Ad(g_t)Y_k\right) = P(Y_1, \dots, Y_k) \ \text{ mit } g_t = \exp(tZ),\ Z, Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{g}$$

Wenn wir diese Gleichung nun in 0 nach t ableiten, so steht auf der rechten Seite 0. Die Faktoren $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ sind für alle i gleich und werden c genannt.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P\left(Ad(g_t)Y_1, \dots, Ad(g_t)Y_k\right) \\
&= c \cdot \sum_i P\left(Ad(g_t)Y_1, \dots, \frac{d}{dt} Ad(g_t)Y_i, \dots, Ad(g_t)Y_k \right)\Big|_{t=0} \\
&= c \cdot \sum_i P\left(Y_1, \dots, ad(Z)Y_i, \dots, Y_k\right) \\
&= c \cdot \sum_i P\left(Y_1, \dots, [Z, Y_i], \dots, Y_k\right) \\
&= c \cdot \sum_i P\left([Z, Y_i], Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_k \right)
\end{aligned}$$

Sei nun $x \in$ E, $X_1, \dots, X_{2k+1} \in T_x(E)$, so gilt:

$$dP(F^k)(X_1, \dots, X_{2k+1}) = kP([F, \theta] \wedge F^{k-1})(X_1, \dots, X_{2k+1}) = 0.$$

$\square$

Von nun an sei $\omega_\xi(P(F^k)) \in H^{2k}_{dRh}(M)$ die zugehörige Kohomologieklasse.
Um nun zu zeigen, dass diese auch vom Zusammenhang unabhängig ist (Satz 2.7), müssen wir zunächst folgende technische Konstruktion betrachten:

Lemma 2.6. *Betrachte eine k-Form $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$, so wissen wir $\omega = ds \wedge \alpha + \beta$, wobei $ds \in T^*[0,1]$ ist und α und β kein ds enthalten.*
Sei $h : \Omega^k(M \times [0,1]) \to \Omega^{k-1}(M)$ mit

$$h(\omega) = \int_{s=0}^{1} \alpha$$

So gilt:

$$dh(\omega) + h(d\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega \text{ mit } i_r(p) = (p, r),\ r = 0, 1\ p \in M$$

Beweis. Wir betrachten zunächst $h(d\beta)$. Es interessieren uns also nur jene Summanden von $d\beta$, die ds enthalten. Wenn wir in lokale Koordinaten übergehen, so sehen wir, dass dies genau $ds \wedge \frac{\partial}{\partial s}\beta$ ist. Somit ist $h(d\beta) = \int_{s=0}^{1} \frac{\partial}{\partial s}\beta = i_1^*\beta - i_0^*\beta$.
Nun betrachten wir weiter $h(d(ds \wedge \alpha))$.
$d(ds \wedge \alpha) = -ds \wedge d\alpha$, wobei noch alle Summanden von $d\alpha$ wegfallen, in denen ds vorkommt, also interessieren nur die Ableitungen in die Richtungen von M, $-ds \wedge d\alpha = -ds \wedge d_x\alpha$. Es gilt also $h(d(ds \wedge \alpha)) = -\int_{s=0}^{1} d_x\alpha$ und aufgrund der Linearität des Integrals $-\int_{s=0}^{1} d_x\alpha = -d_x \int_{s=0}^{1} \alpha = -dh(ds \wedge \alpha)$. Zusammengefasst ist also $h(d(ds \wedge \alpha)) + dh(ds \wedge \alpha) = 0$.
Nun betrachten wir

$$i_1^*(ds \wedge \alpha)(X_1, \dots, X_k) = (i_1^*ds \wedge i_1^*\alpha)(X_1, \dots, X_k) = 0$$

da $i_1^*ds(X) = i_1^*\pi_k^*ds(X)$ nach Definition von ds.
Nun ist aber $(\pi_k \circ i_1)(p) = 1$, also $(\pi_k \circ i_1)^* = 0$
Analog ist $i_0^*(ds \wedge \alpha) = 0$.
Zusammengefasst erhalten wir:

$$\begin{aligned} dh(\omega) + h(d\omega) &= dh(ds \wedge \alpha) + h(d(ds \wedge \alpha)) + 0 + h(d\beta) \\ &= 0 + i_1^*\beta - i_0^*\beta \\ &= i_1^*\omega - i_0^*\omega \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.7. *$\omega_\xi(P(F^k))$ hängt nicht von der Wahl des Zusammenhangs ab.*

Beweis. Es seien nun θ_0 und θ_1 zwei Zusammenhänge auf ξ und F_0 bzw. F_1 die zugehörigen Krümmungsformen.
Wir betrachten nun das G-Hauptfaserbündel $(E \times [0,1], M \times [0,1], G, p)$ und $\widetilde{\theta} \in \Omega^k(E \times [0,1])$ gegeben durch $\widetilde{\theta}_{(x,s)} = (1-s)\pi^*(\theta_0)_x + s\pi^*(\theta_1)_x, (x,s) \in E \times [0,1]$ Nach der Prop. 1.2 ist dies ein Zusammenhang und wir bezeichnen die Krümmung mit $\widetilde{F}$. Weiter gilt

$$i_0^*\widetilde{\theta} = i_0^*\pi^*(\theta_0) = id^*\theta_0 = \theta_0$$

und $i_1^*\widetilde{\theta} = \theta_1$ gilt auch $i_0^*\widetilde{F} = F_0$ und $i_1^*\widetilde{F} = F_1$.
Nach Lemma 2.5 ist $P(\widetilde{F}^k)$ eine geschlossene $2k$-Form. Daher gilt nach Lemma 2.6

$$d(h(P(\widetilde{F})) + h(\underbrace{dP(\widetilde{F})}_{=0}) = i_1^*P(\widetilde{F}) - i_0^*P(\widetilde{F}) = P(F_1^k) - P(F_0^k)$$

Somit ist die Differenz der beiden Formen exakt und sie repräsentieren also dieselbe Kohomologieklasse in $H^{2k}_{dRh}(M)$. □

Wir müssen also nur noch $\omega_\xi(P)$ betrachten.

Satz 2.8. *Für $f : N \to M$ eine differenzierbare Abbildung ist*

$$\omega_{f^*\xi} = f^*\omega_\xi.$$

Beweis. Nach Prop. 1.3 ist $f^*\theta$ ein Zusammenhang auf $f^*\xi$. Die Krümmung berechnet sich durch

$$F' = d(f^*\theta) + \frac{1}{2}[f^*\theta, f^*\theta] = f^*d\theta + \frac{1}{2}f^*[\theta,\theta] = f^*F.$$

Weiter vertauscht Zurückziehung mit lin. Abbildungen, sodass $f^*P(F^k) = P((f^*F)^k)$ gilt. Da wir aber nach Satz 2.7 wissen, dass es genügt irgendeinen Zusammenhang auf $f^*(\xi)$ zu betrachten, folgt nun also:

$$\omega_{f^*\xi} = P(f^*(F)^k) = f^*P(F^k) = f^*\omega_\xi$$

□

Satz 2.9. *Die Abbildung $\omega_\xi : I^*(G) \to H_{dRh}(M)$ ist ein Algebren-Homomorphismus.*

Beweis. Zunächst erinnern wir uns an die Formel:

$$F^k(X_1, \ldots, X_{2k}) = \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k}, \\ \sigma(2i-1) < \sigma(2i)}} \operatorname{sgn}(\sigma) F(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \otimes \cdots \otimes F(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})$$

Wir überprüfen nun die Multiplikativität. Sei also $P \in I^k(G), Q \in I^l(G)$. Für $P \circ Q \in I^{k+l}(G)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&P \circ Q(F^{k+l})(X_1, \dots, X_{2k+2l}) \\
&= P \circ Q \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_{2k+2l}, \\ \sigma(2i-1) < \sigma(2i)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \underbrace{F(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)})}_{F_1^\sigma} \otimes \dots \otimes \underbrace{F(X_{\sigma(2k+2l-1)}, X_{\sigma(2k+2l)})}_{F_{k+l}^\sigma} \right) \\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\tau \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k+2l}, \\ \sigma(2i-1) < \sigma(2i)}} \operatorname{sgn}(\sigma) P \left(F^\sigma_{\tau(1)}, \dots, F^\sigma_{\tau(k)} \right) \cdot Q(F^\sigma_{\tau(k+1)}, \dots, F^\sigma_{\tau(k+l)} \Big)
\end{aligned}
$$

Da aber in der inneren Summe schon alle Permutationen auftauchen, sind die $(k+l)!$ Summanden der äußeren Summe alle gleich und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&P \circ Q(F^{k+l})(X_1, \dots, X_{2k+2l}) \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k+2l}, \\ \sigma(2i-1) < \sigma(2i)}} \operatorname{sgn}(\sigma) P(F_1^\sigma, \dots, F_k^\sigma) \cdot Q(F_{k+1}^\sigma, \dots, F_{k+l}^\sigma)
\end{aligned}
$$

Nun berechnen wir das Wedge-Produkt der Formen, also $P(F^k) \wedge Q(F^l)$ und erhalten:

$$
\begin{aligned}
&P(F^k) \wedge Q(F^l)(X_1, \dots, X_{2k+2l}) \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k+2l}, \\ \sigma(1) < \dots < \sigma(2k), \\ \sigma(2k+1) < \dots < \sigma(2k+2l)}} \operatorname{sgn}(\sigma) P(F^k)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(2k)}) \cdot Q(F^l)(X_{\sigma(2k+1)}, \dots, X_{\sigma(2k+2l)}) \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k+2l}, \\ \sigma(1) < \dots < \sigma(2k), \\ \sigma(2k+1) < \dots < \sigma(2k+2l)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Bigg[\sum_{\substack{\tau \in S_{2k}, \\ [\tau(\sigma(2i-1)) \\ < \tau(\sigma(2i))]}} \operatorname{sgn}(\tau) P(F(X_{\tau(\sigma(1))}, X_{\tau(\sigma(2))}), \dots, F(X_{\tau(\sigma(2k-1))}, X_{\tau(\sigma(2k))})) \\
&\cdot \sum_{\substack{\tau \in S_{2l}, \\ \tau(\sigma(2i-1)-2k) \\ < \tau(\sigma(2i)-2k)}} \operatorname{sgn}(\tau) Q\Big(F(X_{\tau(\sigma(2k+1)-2k)}, X_{\tau(\sigma(2k+2)-2k)}), \\
&\qquad \dots, F(X_{\tau(\sigma(2k+2l-1)-2k)}, X_{\tau(\sigma(2k+2l)-2k)}) \Big) \Bigg]
\end{aligned}
$$

Nun wissen wir aber, dass es folgenlos ist, ob man zunächst alle geordneten Teilmengen und darin alle geordneten Paare betrachtet oder ob man insgesamt alle geordneten Paare sich ansieht, so dass:

$$
\begin{aligned}
&P(F^k) \wedge Q(F^l)(X_1, \dots, X_{2k+2l}) \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k+2l}, \\ \sigma(2i-1)<\sigma(2i)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Big[P(F(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \dots, F(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})) \\
&\quad \cdot Q(F(X_{\sigma(2k+1)}, X_{\sigma(2k+2)}), \dots, F(X_{\sigma(2k+2l-1)}, X_{\sigma(2k+2l)})) \Big] \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k+2l}, \\ \sigma(2i-1)<\sigma(2i)}} \operatorname{sgn}(\sigma) P(F_1^\sigma, \dots, F_k^\sigma) \cdot Q(F_{k+1}^\sigma, \dots, F_{k+l}^\sigma) \\
&= P \circ Q(F^{k+l})(X_1, \dots, X_{2k+2l})
\end{aligned}
$$

Weiter betrachten wir die 1-Abbildung. In $I^*(G)$ ist die 1-Funktion die Abbildung in null Variablen, die 1 auf 1 schickt. Offensichtlich ist das Bild dieser Abbildung eine 0-Form, die der Identität entspricht. $\square$

Wir haben jetzt den Chern-Weil Homorphismus konstruiert. Ein invariantes homogenes Polynom über der Liealgebra wird auf eine charakteristische Klasse in der DeRham-Kohomologie abgebildet.

3 Beispiele zum Chern-Weil Homomorphismus: Chern-Klassen und Pontrjagin-Klassen

Wir betrachten nun zuerst die Fälle von reellen und komplexen Vektorbündeln. Im reellen Fall erhalten wir die Pontrjagin-, im komplexen die Chern-Klassen.

Definition 3.1. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Wir definieren p_k durch die folgende Gleichung

$$\det(t \cdot \mathrm{Id} - A) = \sum_{k=0}^{n} p_k(A) t^{n-k} \;\; A \in \mathfrak{g}$$

Lemma 3.2. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ haben wir*

$$I(Gl_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}[p_1, ..., p_n]$$

Beweis. Idee für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Wegen Stetigkeit und Invarianz sind die Polynome nur abhängig von den Eigenwerten von A (bringe A zunächst in JNF, danach konjugiert man mit passender ε-Matrix.)
Durch Konjugation mit Permutationsmatrizen sind die Polynome symmetrisch in den Eigenwerten. Nun kann man die Theorie der elementarsymm. Polynome anwenden.
Definiert man diese durch

$$\prod_{i=1}^{n} (t - a_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^k \sigma_k(a) \;\; a \in \mathbb{K}^n$$

so gilt

$$p_k(\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)) = (-1)^k \sigma_k(a_1, ...a_n).$$

□

Definition 3.3. Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\xi = (E, M, Gl_n(\mathbb{R}))$ ein Hauptfaserbündel, so nennt man das Bild $P_k(\xi) := \omega_\xi \left(\frac{p_2 k}{(2\pi)^k} \right)$ die k-te Pontrjagin-Klasse in $H^{2k}_{dRh}(M, \mathbb{R})$.
Für ein Vektorbündel γ ist die k-te Pontrjagin-Klasse $P_k(\gamma) := P_k(Fr(\gamma))$ die Klasse von dem zugehörigen Rahmenbündel $Fr(\gamma)$.
Analog definiert man für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\xi = (E, M, Gl_n(\mathbb{C}))$ bzw. ξ ein Vektorbündel die Chern-Klassen $c_k(\xi) \in H^{2k}_{dRh}(M, \mathbb{C})$ durch $c_k(\xi) := \omega_\xi \left(\frac{p_k}{(2\pi i)^k} \right)$.

Beispiel 3.4. Die erste (und einzige) Chernklasse des Linienbündels über $\mathbb{CP}^1$.
Wir betrachten nun $\xi = (\mathbb{C}^2 \setminus 0, \mathbb{CP}^1, Gl_1 = \mathbb{C}^*, \pi)$, wobei $\pi(x, y) = [x, y] \in \mathbb{CP}^1$.
Um die Chernklasse zu berechnen, genügt es, irgendeinen Zusammenhang in ξ zu wählen und damit zu rechnen.
Die Liealgebra zu $Gl_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ ist $\mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Weiter können wir $T_z(\mathbb{C}^2 \setminus 0)$ mit $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{R}^4$ identifizieren.
Sei nun $z = (z_0, z_1)$ die Koordinantedarstellung eines Elementes aus $\mathbb{C}^2 \setminus 0$. Wir betrachten die komplexwertige 1-Form

$$\theta = \frac{\overline{z_0} dz_0 + \overline{z_1} dz_1}{|z_0|^2 + |z_1|^2}$$

wobei dz_0 und dz_1 die kanonischen Basisvektoren von $T_z(\mathbb{C}^2 \setminus 0)$ sind, also $dz_0 = dx_1 + i dx_2$ für die kanonische Basiswahl im $\mathbb{R}^4$.
Um zu sehen, dass θ wirklich ein Zusammenhang ist, müssen wir zunächst $\dot{\sigma}_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2, z \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$ bestimmen. Für $g \in \mathbb{C}^*$ ist $\sigma_z(g) = (g \cdot z_0, g \cdot z_1)$ eine lineare Abbildung. Da die Ableitung einer linearen Abbildung wieder die Abbildung selbst ist, gilt für $m \in \mathbb{C}$ dass $\dot{\sigma}_z(m) = (m \cdot z_0, m \cdot z_1)$, also:

$$\begin{aligned}
\theta_z \circ \dot{\sigma}_z(m) &= \theta_z((m \cdot z_0, m \cdot z_1)) \\
&= \frac{\overline{z_0} dz_0((m \cdot z_0, m \cdot z_1)) + \overline{z_1} dz_1((m \cdot z_0, m \cdot z_1))}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \\
&= \frac{\overline{z_0} m \cdot z_0 + \overline{z_1} m \cdot z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \\
&= m
\end{aligned}$$

Weiter müssen wir noch zeigen, dass $\sigma_g^* \theta = Ad(g^{-1}) \circ \theta$. Wir wissen, dass für $G = Gl_n(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

$$Ad(g)(m) = gmg^{-1}, g \in G, m \in \mathfrak{g}$$

Insbesondere ist also, da $\mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ abelsch, in diesem Fall $Ad(g) = id_{\mathfrak{g}}$.
Wir müssen also zeigen, dass $\sigma_g^* \theta = \theta$. Hierzu zeigt man analog zu oben, dass das Differential der Abbildung $\sigma_g : E \to E$, $y \mapsto g \cdot y$ gerade wieder Multiplikation mit g ist, also

$d(\sigma_g)_z(X) = g \cdot X,\ X \in T_z(E)$.
Setzen wir dies also einmal in unseren Zusammenhang ein:

$$\begin{aligned}
\sigma_g^* \theta_z(X) &= \theta_{\sigma_g(z)}(d\sigma_g(X)) \\
&= \frac{g \cdot \overline{z_0} dz_0(g \cdot X) + g \cdot \overline{z_1} dz_1(g \cdot X)}{|g \cdot z_0|^2 + |g \cdot z_1|^2} \\
&= \frac{g \cdot \overline{z_0} g \cdot dz_0(X) + g \cdot \overline{z_1} g \cdot dz_1(X)}{g^2 \cdot (|z_0|^2 + |z_1|^2)} \\
&= \frac{\overline{z_0} dz_0(X) + \overline{z_1} dz_1(X)}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \\
&= \theta_z(X)
\end{aligned}$$

Also ist θ ein Zusammenhang in ξ.
Der nächste Schritt ist es nun, mit Hilfe der Krümmung die Chernklasse zu berechnen.
Da $\mathbb{C}^*$ abelsch ist, ist die Lieklammer Null und insbesondere $F = d\theta$.
Wir betrachten nun $U = \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1]\} = \{[z_0 : z_1] \mid z_0 \neq 0\}$. Als lokale Koordinate können wir nun $z = \frac{z_1}{z_0}$ wählen, so dass $z_1 = z_0 z$ und $dz_1 = z dz_0 + z_0 dz$. Für θ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\overline{z_0} dz_0 + \overline{z_0 z}(z dz_0 + z_0 dz)}{|z_0|^2(1 + |z|^2)} \\
&= \frac{dz_0}{z_0} + \frac{\overline{z}}{1 + |z|^2} dz
\end{aligned}$$

Da $d\left(\frac{dz_0}{z_0}\right) = 0$ sehen wir, dass $F = d\theta = d\left(\frac{\overline{z}}{1+|z|^2} dz\right)$.
Mit Hilfe des Auswertungsisomorphismus (DeRham-Isomorphismus) wissen wir, dass

$$\begin{aligned}
\langle c_1(\xi), [\mathbb{CP}^1] \rangle &= \int_{\mathbb{CP}^1} c_1(F) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} -F \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \to \infty} \int_{B_r} d\theta \\
&\overset{Stokes}{=} -\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \to \infty} \int_{S_r} \theta \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \to \infty} \int_{S_r} \frac{\overline{z}}{1 + |z|^2} dz \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \to \infty} \frac{r^2}{1 + r^2} \int_{S_r} \frac{dz}{z} \\
&= -\lim_{r \to \infty} \frac{r^2}{1 + r^2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Chernklasse Bild des Erzeugers von $H^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z})$ unter der Einbettung $H^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{C})$ ist.

Wir wollen noch eine Eigenschaft von Chernklassen festhalten und eine andere Definition dieser sehen.

Satz 3.5. *Für ein Bündel $\xi = (E, M, Gl_n(\mathbb{C}), \pi)$ definieren wir die totale Chernklasse*

$$c(\xi) := 1 + c_1(\xi) + ... + c_n(\xi)$$

Seien jetzt $\xi = (E, M, Gl_n(\mathbb{C}), \pi)$ und $\eta = (F, M, Gl_m(\mathbb{C}), \tau)$ zwei Bündel und $\xi \oplus \eta$ ihre Whitneysumme (Erinnerung: Dies ist ein $Gl_{n+m}(\mathbb{C})$-Bündel über M).
Es gilt:

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \wedge c(\eta)$$

Ein anderer Ansatz Chernklassen zu definieren findet sich zum Beispiel im Hatcher:

Definition 3.6. Seien $cr_1, cr_2, \dots$ eine Folge von Funktionen, die jedem komplexen Vektorbündel $\xi : E \to X$ eine Klasse in $H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ zuordnen, die nur von der Isomorphieklasse des Bündels abhängen, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

a) Für $f : \eta \to \xi$ gilt
$$cr_i(f^*\xi) = f^*(cr_i(\xi))$$

b) $cr(\eta \oplus \xi) = cr(\eta) \cup cr(\xi)$ für zwei Vektorbündel η und ξ, wobei $cr = cr_1 + \cdots + cr_n$ die totale Chernklasse ist.

c) $cr_i(\xi) = 0$ für $i > \dim(\xi)$.

d) Für das tautologische Bündel γ über $\mathbb{CP}^\infty$ gilt, dass $cr_1(\gamma) = \alpha$, wobei α der Erzeuger von $H^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z})$ ist, so dass $H^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Theorem 3.7. *Zu jedem Vektorbündel existieren Chernklassen und sie sind eindeutig.*

Proposition 3.8. *Für ein Vektorbündel ξ über einer glatten Mannigfaltigkeit M ist $c_i(\xi)$ das Bild von $cr_i(\xi)$.*

Beweis. Axiom a) gilt nach Satz 2.8.
Axiom b) haben wir in Satz 3.5 gezeigt.
c) gilt nach der Definition der c_i.
d) wird in Bsp 3.4 gezeigt, da $H^2(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z}) \simeq H^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z})$ □